

(65) 弾性波速度測定による異方性岩石の対称軸および弾性定数の決定に関する研究

山口大学工学部	正会員	佐野	修
山口大学大学院		民部	雅史
山口大学大学院		平野	亨
山口大学工学部	正会員	水田	義明

Determination of Elastic Properties of Anisotropic Rocks

Osam SANO,	Yamaguchi University
Masashi MIMBU,	graduate student, Yamaguchi Univ.
Toru HIRANO,	graduate student, Yamaguchi Univ.
Yoshiaki MIZUTA,	Yamaguchi University

ABSTRACT

Oriented cracks in rocks and/or joints in rockmass will produce anisotropic elasticity. When the rock has anisotropic elasticity, we must know the elastic constants to fully describe the elastic behavior of rocks under stresses. In the anisotropic body, three independent elastic wave velocities in all the directions exist. In this study, we tried to determine twenty-one elastic stiffnesses of anisotropic rock, and to search symmetry axes of the rock, by using elastic wave velocities in some directions. Calculated elastic stiffnesses and the axes of symmetries of Oshima granite agreed well with published results.

1. はじめに

岩石や岩盤の力学的性質は、それぞれの構成要素である造岩鉱物や岩石によってある程度定まるが、さらに内部に存在する不連続面、すなわち岩石においてはマイクロクラックの、岩盤においてはジョイントの影響が極めて大きい。マイクロクラックおよびジョイントはこれと解析対象物との大きさの違いが重要となる場合には区別して表現されるが、弾性体内部に存在する不連続面としては同じものであり、いずれもクラックと表現することができる。一般に材料内部にクラックが存在すると材料の弾性率が低下する。さらにクラックの分布が位置に関してランダムであれば均質性が、方位に関してランダムであれば等方性が仮定できるが、そうでない場合にはそれぞれ不均質性あるいは異方性が生じる。

岩盤内空洞周りの応力集中域で生じるクラックの評価に関する研究は以前から多数見ることができ、近年ではコンピュータ・トモグラフィーを利用した岩盤の不均質性の評価に関する試みがなされている。しかし一般の力学的挙動の解析はいぜんとして等方性仮定のもとで行われることが多い。これは上記のクラックの方位に関するランダム分布が仮定されていることを意味している。しかしクラックは明らかに力の場のなかで形成しており、方位分布がランダムであるよりむしろ配向性があると考えられるほうが自然であろう。

岩本[1983]は大島花崗岩が直交異方性的性質を示すことを示し、等方性仮定で動的弾性率を求めると速度測定方向によっては負のポアソン比が得られることを示した。さらに河嶋[1988]および民部[1989]は数種の花崗岩において同様に直交異方性的性質を見出すとともに、200MPaまでの静水圧下で弾性率を決定し、花崗岩の異方性がマイクロクラックの配向性によること、および異方性は特殊な花崗岩にのみ見られるものではなく、むしろ花崗岩に共通の性質であると考えた。さらに花崗岩岩盤に見られるジョイントの配向性についても報告されている[久永他, 1990]。

田辺[1986]は花崗岩のような直交異方性を有する岩盤で水圧破砕法による応力測定を行なった場合について考察した。主応力方向、主応力差および弾性率の異方性の程度によりその結果はさまざまであるが、主応力方向と無関係に常に異方性の主軸方向近傍やこれに一定角度をもった方向に破砕きれつが生じる例やきれつ方向が特定できない例などを示した。したがって異方性の顕著な岩盤で水圧破砕を行なった時には、等方性仮定は大きな誤差をもたらすと述べている。

異方性解析が必要な場合には、対象となる岩盤および岩石の弾性定数を知る必要がある。異方性岩石の弾性定数に関する研究はいくつか認められるが、その多くは高度の対称性が仮定できる岩石について行われたもので、弾性定数はその対称性に基づいたいくつかの決められた方向の弾性波速度から計算されている[Lo et al., 1986; 佐野他, 1987; 佐野他, 1988]。しかしこの方法では、対称性およびその対称軸に関する情報が必要で、仮に対称性お

よび対称軸が既知であっても、弾性波速度の測定方向が予めその対称性により固定されてしまうため、岩盤の弾性率を求める方法としては制限が多く一般性に欠けるものと思われる。本研究では、予め対称性を仮定することなく、多くの方向の独立な速度の測定結果の情報のみから数値解析によって弾性定数と対称軸を決定することを試みた。

2. 異方性体の弾性スティフネスと弾性波速度

任意の直交座標系で応力およびひずみテンソル σ_{ij} および ε_{ij} を考える。いま任意の応力・ひずみ状態にある物体が完全弾性体であるならば、フックの法則からこれら2つのテンソルは次のように結びつけられる。

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

ここで C_{ijkl} は弾性スティフネスとよばれる4階のテンソルで81個の要素からなる。しかし独立な要素は、弾性の対称性、すなわち $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ 、 $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ の関係により36個に減少する。さらに w をひずみエネルギーとすれば次式が成立つので、独立な要素はさらに21個にまで減少する。

$$C_{ijkl} = \partial^2 w / \partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}$$

$$w = \sigma_{mn} \varepsilon_{mn} / 2$$

物体に等方性仮定をすれば、あるいは異方性があっても物体の弾性的な性質に対称性が存在するならば、独立な要素は減少する。例えば等方性体では独立な弾性率は2個であり、横等方性体では5個である。しかし等方性体の場合を除き、任意の直交座標系に関する弾性スティフネスは、一般に21個あると見る必要がある。例えば直交異方性体の主軸に関する独立な弾性スティフネスは9個であり、その他は互に等しいかゼロであるが、同一の物体でも任意の直交座標系における弾性スティフネスはすべてゼロでないと仮定する必要がある。すなわち任意の座標系の弾性率 C_{ijkl} はこの座標系の主軸に関する方向余弦 a_{ij} と、主軸に関する弾性スティフネス C^*_{ijkl} を用いて次式で与えられる。

$$C_{ijkl} = a_{im} a_{jn} a_{ko} a_{lp} C^*_{mnop}$$

これは4階のテンソルの座標変換の式であり、対称性により独立な弾性スティフネスの数が限定されるものでも、任意の直交座標系における弾性スティフネスは最大21個のゼロでない要素を持ちうる事が分る。したがって対称性を仮定しない場合には21個の弾性率を未知数とする必要がある。

半無限弾性体内を伝わる平面波の伝播速度はKelvin-Christoffelの方程式によって与えられる。

$$\det |\Gamma_{ik} - \rho v^2 \delta_{ik}| = 0 \quad (1)$$

ここで ρ は密度、 δ_{ik} はクロネッカーのデルタであり、 Γ_{ik} はChristoffelスティフネスである。 Γ_{ik} は波面の法線の座標軸に関する方向余弦を a_i とすると

$$\Gamma_{ik} = a_{ij} a_{kl} C_{ijkl}$$

となる。(1)式は v^2 に関する3次の方程式なので原理的に3つの速度が解として存在するが、波面の法線の方向余弦は速度と次のような関係を持つので、結局 v について12次の方程式となる[Musgrave, 1970]。

$$a_i a_j = v_i v_j / (v_k v_k)$$

(1)式を一般的に解くには恐ろしく膨大な数値計算が必要となる。そこで実際に計算を行う際には、対称性を仮定して C_{ijkl} の数を減らすことにより式を簡単な形に変形して解くことが普通であり、さらに弾性波速度測定方向も対称性に関する特殊な方向を選択することが普通である。しかし対称軸が未知の場合には測定方向を特定することはできず、さらに、対称性を仮定しない場合にはこのような単純化は不可能である。

3. 弾性スティフネスの決定方法

本研究で考えている弾性波速度から弾性率を求める問題は基本的に逆問題であり、岩盤の均質性あるいは等方性をいずれも仮定せずに弾性率を求めることは極めて困難である。一般にこの問題は等方性仮定のもとで不均質性の解を求める問題とするか、あるいは均質性仮定のもとで異方性の解を求める問題とするか、いずれかの選択がせまれる。前者の問題は最近多くの研究が見られるようになった。本研究で扱う問題は後者に相当するが、単純な最小値問題として取扱う。

本研究の目的は異方性体の弾性的対称性、その測定系で定義された座標系に関する対称軸(主軸)の方向余弦を知ること、および主軸に関する独立な弾性率を求めることである。この場合Kelvin-Christoffelの式は、弾性波速度と密度を係数とする主軸に関する独立な21個の弾性スティフネスと5個の独立な方向余弦を未知数とする9次の連立方程式となる。岩石に比較的小さい対称性が存在する場合には、求められた弾性スティフネスのうち、 C^*_{ijkl} および C^*_{ijij} を除いた要素はゼロに近い値に収束するはずであり、さらに高度の対称性が存在する場合にはその他の要素のいくつかはほぼ等しい値に収束するはずである。しかしこの問題をそのまま解くことは誤差の伝播を考慮すると現実的とは思えない。本研究ではKelvin-Christoffelの式を任意の直交座標系に関する21個の弾性スティフネスのみを未知数として解くことを第一段階とし、さらにこの結果得られた弾性スティフネスの座標回転を行ない対称性を検討することを第二段階として、仮に対称性が見出された場合にはその主軸の方向余弦を決定することにする。

第一段階は21変数3次の連立方程式を解くことによって解決される。この方程式は次数が大きく未知数が多いの

で誤差の伝播が極めて大きいことが考えられ、未知数の数より多い観測方程式により、最小二乗法で求める必要がある。またこのような非線形の多元連立方程式を解くには数値解法しかないので、共役勾配法[Fletcher, Reeves, 1964]を用いて残差二乗和関数の最小化問題として解くことにした。原理的に連立方程式の次数だけの複数組の解が存在するので、例えば観測方程式が縦波の速度により立てられたものでも、初期値や探索経路によっては、横波の速度の解へと収束する可能性もあるので方程式の取扱には注意が必要である。

具体的に残差二乗和関数を設定する場合に二つの取扱があり得る。まず第一の方法は、原式すなわちKelvin-Christoffelの式をそのまま使用する方法である。第二の方法はKelvin-Christoffelの式がChristoffelスティフネスに関する固有方程式であり、三つの固有値が一つの縦波の速度および二つの横波の速度を与え、固有ベクトルがその振動方向を与えることを考慮し、Kelvin-Christoffelの式の一般解を求めて使用する方法である。この場合には測定された速度を持つ波の振動方向が既知でなければならない。すなわち計算された固有ベクトルと計測された振動方向とを比較することにより、計測された波動と計算された波動が同一のものであるか否かを評価することができる。

第二段階は3変数8次式の最小化問題で、数値解法によって解くには非線形性がかなり強く誤差の拡大により解を得ることが困難なことが予想される。しかし第二段階では未知数とする3個の方向余弦の取り得る範囲が±1と限定されることを積極的に利用することができる。そこで第一段階で求められた21個の弾性率を用いて、まずはじめの座標系の x_1 軸周りの速度を計算し、その面内の極値の方向を決定する。この方向は x_1 軸に垂直で、もし対称軸があるならば少なくとも一つの対称軸に垂直な平面近傍にあるはずである。ここで x_1 軸とこの極値方向とで新たな座標系を定義し、次に新しく定義された x_2 軸周りの速度を計算し、その面内の速度の極値方向を決定し、さらに新たな座標軸を定義する。以下この手順を、対称性によりゼロとなる可能性のあるスティフネス要素が減少するあいだ繰返し行ない、主軸方向を決定する。直交異方性体や横等方性体では主軸方向で弾性波速度が必ず極値となるので、このような対称性を持つ岩石の対称軸はこの方法で求めることができる。

4. 解析結果とその考察

弾性定数の決定に関する計算はパーソナル・コンピュータ上で動くC言語で作成した数値計算プログラムを用いて行った。まず解析の妥当性を検討することを目的として、直交異方性仮定のもとで得られた大島花崗岩の弾性率を参考にして表-1(a)に示すような直交異方性体モデルを作製し、いくつかの方向の速度を計算し、これを測定値と仮定して解析を試みた。なお4階のテンソル c_{ijkl} の表記法として、通常の実験的研究で採用されている6行6列のマトリックス c_{ij} を用いる。速度計算に際し設定した座標系は、主軸である1軸周りに35°回転した座標系の2'軸周りにさらに15°回転した座標系の3''軸周りにさらに25°回転させた座標系である。直交異方性体の一つの主軸の周りに回転し、さらに別の座標軸に関し少なくとも1回回転した座標系では、21個の弾性スティフネスがすべてゼロでない値をとる。この座標系で定義される弾性スティフネスを表-1(b)に示す。モデル計算ではこの弾性率を用いた。実際に計測される速度には、不均質性によるばらつきと、含水状態等の不均一性によるばらつき、および測定誤差が含まれることを考慮する必要がある。そこで解析プログラムに入力する速度として、3つの座標軸に垂直な面内を伝播する速度を計算した結果に乱数を加算して誤差を生じさせた。

振動方向を考慮しない第一の解析方法により、±20m/sの範囲の乱数を加算した速度モデル(○印は縦波、△と□は横波を示す、以下同じ)とこの速度から逆算した弾性率により計算した速度の理論曲線を図-1(a)に、同様に±200m/sの範囲の乱数を加算した速度モデルと逆算した弾性率により計算した速度の理論曲線を図-1(b)に示す。また決定された対称軸に関する弾性スティフネスを表-2示す。なお大島花崗岩を例に取ると、弾性波速度の最大値が約5000m/s、最小値が約2500m/sなので、±200m/sの誤差は最大16%のばらつきに相当する。一方、Kelvin-Christoffelの方程式の3つの根から得られる速度をもつ波動の振動方向を計算し、入力データの振動方向と比較して、Kelvin-Christoffelの方程式の速度の根を区別する第二の方法により求めた弾性率を上記と同様に±20m/sと200m/sの速度モデルについてそれぞれの速度の理論曲線を図-2(a)と(b)に示す。また対称軸に関する弾性スティフネスを表-3に示す。図-1(a)と図-2(a)から、入力データに含まれる誤差が小さい時(±20m/sの誤差)にはいずれも収斂値は、座標回転後のモデル c_{ij} である表-1(b)

表-1 直交異方性体弾性スティフネスモデル

(a) 座標軸が対称軸に一致

C_{ij} , GPa					
35.0	5.0	8.0	0.0	0.0	0.0
	50.0	10.0	0.0	0.0	0.0
		55.0	0.0	0.0	0.0
			25.0	0.0	0.0
				20.0	0.0
					15.0

(b) すべての座標軸が対称軸に傾斜

C_{ij} , GPa					
35.8	8.1	8.0	0.4	-0.3	1.6
	51.1	5.9	3.6	-0.5	4.2
		54.9	1.7	-2.7	0.5
			20.1	1.6	-1.1
				19.7	1.7
					19.0

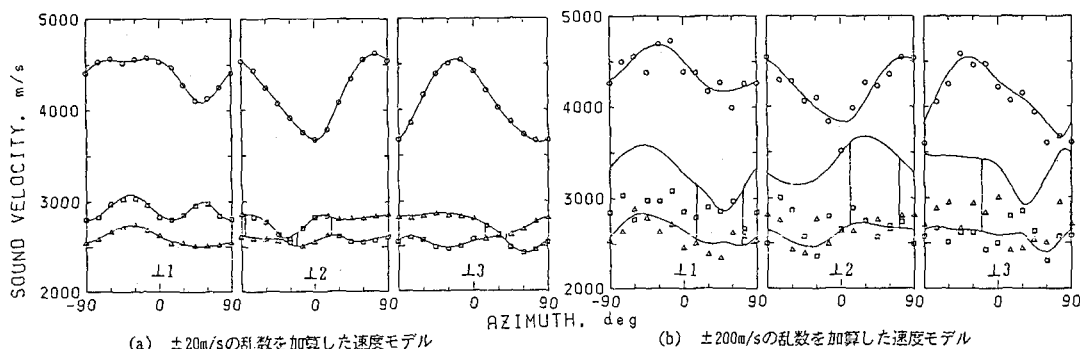


図-1 誤差を重ね合せた速度モデル(○印は縦波, △と□は横波)から第一の方法で逆算した弾性スティフネスを用いて計算した速度の理論曲線。

から理論的に計算される真の速度曲線とほぼ完全に一致することがわかった。一方、誤差が大きい場合には入力データの速度の振動方向を特定する必要があることが分る。前者の方法で得られた弾性スティフネスでも、等方性仮定を行なうよりは、はるかに本来の性質を良く表わしていると言えるが、図にみられるように特に2つの横波の振動方向に混乱が認められる。

岩盤への適用に先立ち、本研究の方法により、現実の速度測定結果により弾性スティフネスを求められるか否かを検討する必要がある。ここで入力した弾性波速度は、大島花崗岩供試体の直交する3つの面内を伝播する3種類の弾性波速度である。ただしこの面は任意に定めることができるが、測定データは肉眼鑑定により定めた異方性面と一致している。弾性スティフネスの計算は、上記の2種類の方法で行った。その結果を表-4に示す。さらにこの結果を用いて理論的に計算される弾性波速度と入力した弾性波速度との関係を図-3(a)および(b)に示す。第一の方法で得られた弾性スティフネスは、縦波の速度曲線に関しては妥当な結果と言えるが、横波は実際とは異なるところに収斂している。これは2つの横波が一つの横波速度のばらつきのものと判定されてしまったためである。第二の方法では、ほぼ信頼できる値に収斂している。また弾性波速度には、方向計測の誤差や計測系の分解能に起因する誤差などの偶然誤差、だけでなく、供試体自身の物性値の位置によるばらつきなどによる誤差が含まれる。例えば40cm×80cm×15cmの大島花崗岩のブロックから同一方向にコアリングした69本の供試体を用いた同一方向の縦波速度測定の結果、この程度のブロックの大きさで±100m/sのばらつきがある。モデルを用いた解析では±200m/sの誤差でも十分信頼できる値に収斂しているので、岩盤での適用も十分可能と思われる。測定結果に含まれる誤差が大きい時には、特に速度差の少ない横波においては、入力された測定値からだけでは2種類の横波を区別することは困難で、第一の方法で示された結果のように、2種類の横波を1つの横波とする方が誤差を最小にする場合も生じることがわかる。

表-2 誤差を重ね合せた速度モデルから第一の方法で逆算した対称軸に関する弾性スティフネス

(a) ±20m/sの乱数を加算した速度モデル

C _{ij} , GPa					
35.0	5.9	7.2	0.4	-0.0	0.0
	49.8	9.7	0.1	-0.1	-0.1
		55.0	0.0	0.1	0.3
			25.3	-0.1	0.2
				20.0	0.0
					14.9

(b) ±200m/sの乱数を加算した速度モデル

C _{ij} , GPa					
33.5	4.3	-3.8	0.0	-0.1	-1.3
	56.6	-6.5	-0.1	4.4	0.0
		58.4	0.0	0.7	12.9
			27.6	-5.9	-0.3
				26.4	-2.6
					15.8

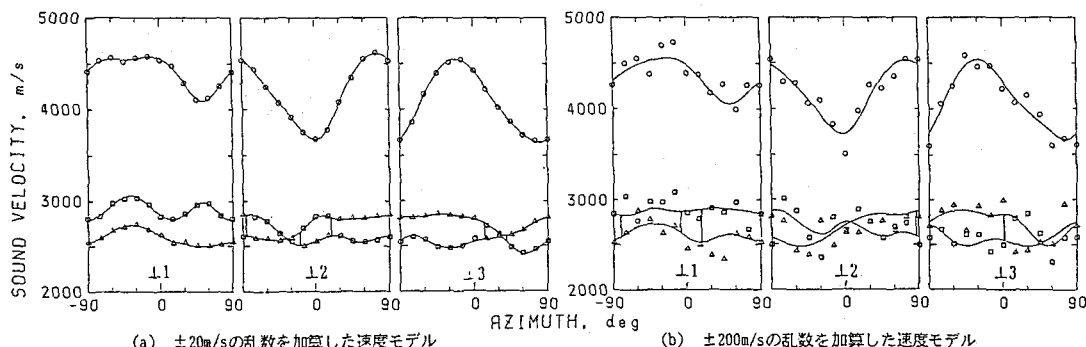


図-2 誤差を重ね合せた速度モデル(○印は縦波, △と□は横波)から第二の方法で逆算した弾性スティフネスを用いて計算した速度の理論曲線。

表-3 誤差を重ね合せた速度モデルから第二の方法で逆算した対称軸に関する弾性スティフネス

(a) $\pm 20\text{m/s}$ の乱数を加算した速度モデル

C_{ij} , GPa					
35.0	5.1	7.7	0.2	0.0	0.0
	49.9	10.0	0.0	0.1	0.0
		55.0	0.0	0.2	0.2
			25.0	-0.1	0.0
				19.9	-0.1
					14.8

(b) $\pm 200\text{m/s}$ の乱数を加算した速度モデル

C_{ij} , GPa					
33.2	0.8	8.8	1.9	0.0	-1.1
	53.1	11.2	0.6	0.1	0.0
		54.9	0.0	-1.2	-2.0
			22.0	0.8	-0.9
				20.2	0.2
					16.3

表-4 大島花崗岩の測定速度から求めた対称軸に関する弾性スティフネス

(a) 第一の方法

C_{ij} , GPa					
36.6	-10.5	-1.3	-10.3	-0.8	3.3
	50.6	5.7	1.1	-7.9	0.1
		57.4	0.0	0.3	7.0
			21.8	-2.7	3.2
				26.2	5.6
					25.3

(b) 第二の方法

C_{ij} , GPa					
36.9	4.6	6.9	1.7	-0.1	1.5
	49.5	6.5	-0.2	0.5	0.0
		57.4	0.0	-0.1	-0.2
			22.6	0.1	-0.6
				20.2	0.2
					19.1

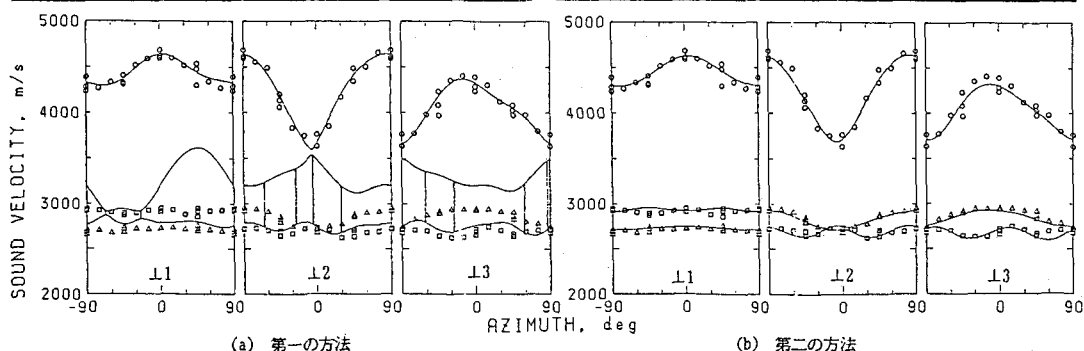


図-3 大島花崗岩の測定速度(○印は縦波、△印は横波)から求めた弾性スティフネスより計算した速度の理論曲線。

したがって入力する弾性波速度の誤差が小さいならば3次方程式の解を特定しない第一の方法でも最適解が得られるが、岩石のような基本的に不均一なものでは、解を特定する第二の方法が望ましいと考えられる。ただし第一の方法でも対角要素に関する限りは、等方性を仮定するよりはるかに本来の性質をよく示す解が得られており、この方法では測定された波の振動方向を厳密に意識する必要はないという利点を考慮すれば軽々に捨ててしまうことはできない。

参考文献

- Fletcher, R., and Reeves, C. M., Function Minimization by conjugate gradients, Computer Journal, Vol. 7, pp. 149-154, 1964.
- Hearmon, R. F. S., Applied Anisotropic Elasticity, Oxford University Press, Oxford, 1961, 136p.
- 久永喜代志, 工藤洋三, 佐野 修, 西南日本内帯の花崗岩類に認められる節理の定向性について, 第22回岩盤力学シンポジウム論文集, 1990 (印刷中).
- 岩本 健, ケイ酸塩質岩石のダイラタンシー現象の定量化に関する研究, 山口大学修士論文, 1983, 201p.
- 河嶋 智, 異方性岩石の弾性率に関する研究, 山口大学修士論文, 1988, 182p.
- Lo, T. W., Coyner, K. B., and Toksoz, M. N., Experimental determination of elastic anisotropy of Berea sandstone, Chicopee shale, and Chelmsford Granite, Geophysics, Vol 51, pp. 164-171, 1986.
- 民部 雅史, 3種の花崗岩の弾性的性質に関する基礎的研究, 山口大学卒業論文, 1989, 154p.
- Musgrave, M. J. P., Crystal Acoustics, Holden-Day Inc., San Francisco, 1970, 288p.
- 佐野 修, 河嶋 智, 工藤洋三, 水田義明, 直交異方性体の弾性波の速度について, 第8回西日本岩盤工学シンポジウム論文集, pp. 8-15, 1987.
- 佐野 修, 河嶋 智, 工藤洋三, 水田義明, 異方性体としての花崗岩の弾性率に関する実験的研究, 材料, 第37巻, 第418号, pp. 818-824, 1988.
- Schreiber, E., Anderson, O. L., and Soga, N., Elastic Constants and Their Measurement, McGraw-Hill, New York, pp. 9-29, 1973.
- 田辺正文, 原位置応力測定とその信頼性の検討, 山口大学修士論文, 1986, 201p.