

## (23) 損傷確率関数による岩質材料の 強度と変形に関する考察

日本大学工学部 正員 ○ 田野久貴  
東北大学工学部 正員 佐武正雄

### ANALYSIS OF STRENGTH AND DEFORMATION OF ROCK-LIKE MATERIALS BY USE OF WEIBULL DISTRIBUTION OF DAMAGE

Hisataka TANO Nihon University  
Masao SATAKE Tohoku University

#### Abstract

This paper proposes Weibull distribution to describe the stress-strain relationship in the softening process of rock-like materials under uniaxial compression. This distribution of internal damage of the material is given by the compliance of the specimen. An idea of effective cross section of a specimen was introduced into the concept of damage. The Weibull distribution function is suitable to express its internal damage. Moreover, the peak strength and strain softening can be expressed by a simple form with two Weibull's parameters respectively.

#### 1. まえがき

本文は、圧縮下の岩質材料に生じる内部の微視的損傷を表す確率関数として、Weibull分布を提案し材料の示すピーク強度やひずみ軟化現象を考察している。仮定する関数によっては、ピーク強度を解析的に得ることが従来困難であったが、提案するWeibull関数によってこれが可能であることを示している。なお、同様な関数を用いて応力-ひずみ関係に注目したいくつかの研究<sup>1)~3)</sup>も報告されているが、本文はやや異なる観点から考察している。内部に生じる微視的破壊と材料の巨視的挙動との対応については、例えばBrace<sup>4)</sup>やBieniawski<sup>5)</sup>の報告があり、一方、発生するクラックの微視的な観察による報告も多く、これらは例えばKranz<sup>6)</sup>によってまとめられている。本文は、これらの微視的挙動と材料の巨視的挙動とを対応させるためのモデルとして、材料内部の逐次破壊を表現するために損傷確率関数を提案している。この損傷確率分布関数は、“有効断面積”が内部の逐次破壊によって減少するという考えを用いて導入されるが、この概念は岩質材料においては、例えばBrady<sup>7)</sup>によって実験的に検討が加えられているが、ピーク強度を中心とした議論である。“損傷”という概念は周知のように、最近では京谷<sup>8)</sup>によってテンソルとして岩盤の力学挙動の解析に導入されているが、そこにおいては、載荷前にすでに存在しているクラックや節理は先天的損傷として扱われるのに対して、本文では載荷後に生じる損傷を確率論的に取り扱っている。

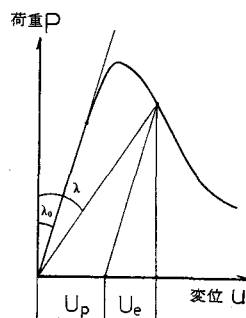


図1 内部損傷による  
コンプライアンス  
の変化

#### 2. 損傷確率関数の定義とピーク強度

##### (1) 有効断面積と損傷確率分布関数

まずコンプライアンスに注目する。すなわち、長さ $L$ 、断面積 $A$ の試験片が変位 $u$ において荷重 $P$ が発生しているとき、そのコンプライアンス $\lambda_0$ は次式で与えられる。

$$\lambda_0 = \frac{u}{P} = \frac{\varepsilon L}{\sigma A} = \frac{L}{E} \frac{1}{A} \quad (1)$$

ここに、Eはその試験片のヤング率であり、非破壊部分のヤング率は一定と仮定する。

一方、内部に破壊による損傷が生じると図1に示すようにコンプライアンスλは増加する。式(1)において、コンプライアンスλ<sub>0</sub>が増加してλとなるのは断面積Aが減少するためと考えることができる。すなわち、内部の微視的破壊の発生によって荷重を支持し得る実質的な材料の有効断面積をA<sub>0</sub>とすると次式を得る。

$$\lambda = \frac{L}{E} \frac{1}{A_0} \quad (2)$$

ここで 有効断面積の全断面に占める割合としての確率分布関数を次式のように定義し、式(1)、(2)を用いると次式を得る。

$$F(u) = 1 - \frac{A_0}{A} = 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} \quad (3)$$

したがって、コンプライアンスλの変化から累積確率分布関数F(u)が求められる。式(3)より明らかに、このF(u)は損傷の程度を表していると考えてこれを損傷確率分布関数と呼ぶこととする。

## (2) ピーク強度

変位uが与えられたとき生じる荷重Pは次式で示される。

$$P = \frac{EA_0(u)}{L} u = \frac{EA}{L} [1 - F(u)] u \quad (4)$$

ここで変位uがu+duであるとき、F(u)がF(u)+dF(u)となり、そのときの荷重がP'であるとすると、いわゆるピーク強度とはP'-P=0を満足するときの応力であるから、式(4)を用いて高次の項を無視すると次式を得る。

$$[(1-F(u)) du - u dF(u)] = 0 \quad (5)$$

変位uの代わりにひずみを考えても以上の議論は成立するから、これをxで表すと次式を得る。

$$\frac{1}{x} = \frac{f(x)}{1-F(x)} \quad (6)$$

ここに、F(x)は確率分布であり、f(x)はその確率密度関数である。式(6)は一般に解析的には解けないが<sup>6)</sup>、損傷確率関数として式(7)に示すWeibull分布<sup>10)</sup>を用いると式(8)に示すような簡潔な解が得られる。なお、m、εはバラツキおよび尺度を表すWeibullのパラメータである。

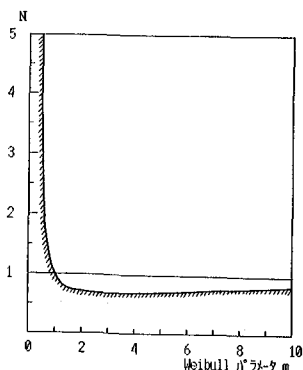


図2 WeibullパラメータmとNの関係

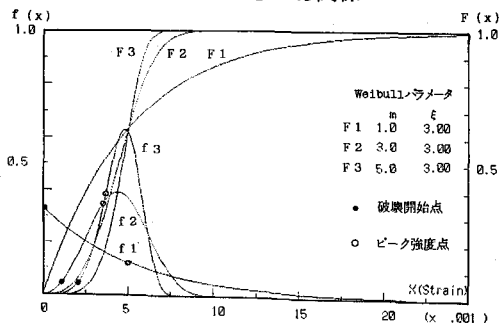


図3 mを変えたWeibull分布

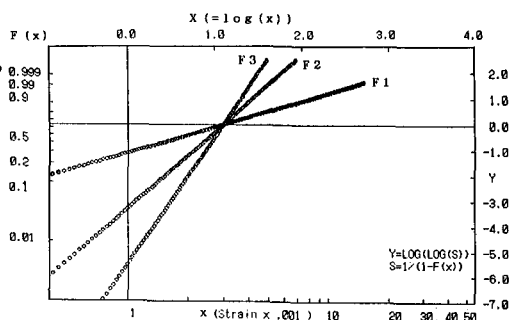


図4 同上 (Weibull 確率紙)

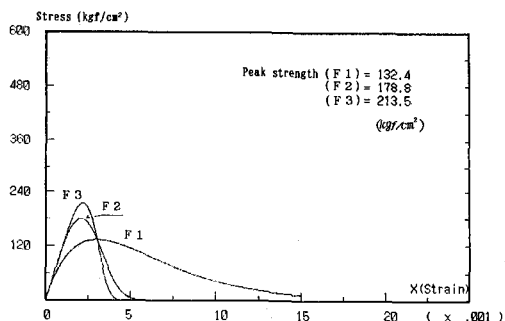


図5 図3に対応するσ-ε関係

$$F(x) = 1 - \exp \left[ - (x/\xi)^m \right] \quad (7)$$

$$x = N\xi \quad (8)$$

ここにNは次式で示される。

$$N = (1/m)^{1/m} \quad (9)$$

したがって式(8)より2つのWeibullパラメータ(m, ξ)が与えられれば、ピーク強度に対応するひずみ(x)が解析的に求められる。このmとNの関係を図2に示す。

### 3. 損傷確率関数の性質と材料の破壊挙動

#### (1) Weibullパラメータとピーク強度

ピーク時のひずみを $\varepsilon_{ok}$  ( $x = \varepsilon_{ok}$ ) とすると式(8)は次式で示される。

$$\varepsilon_{ok} = N\xi \quad (10)$$

Nは式(9)に示すように損傷関数F(x)のバラツキを表すmの関数であり、ξはその分布の位置を表すパラメータであるから、分布の形が一定すなわちmが一定の場合には、ピークひずみはもう一方のパラメータξに正比例することがわかる。その勾配Nは図2に示したように、 $m \geq 1$ の範囲では簡単な計算により、 $m \rightarrow \infty$ および $m = 1$ のとき $N = 1$ であり、 $m = e$ のとき最小値 $N \approx 0.7$ をとる。また、 $m < 1$ ではNは急激に増加することがわかる。図3にξを一定としmを変えた場合のWeibull分布の例とその密度関数を、図4はこれらをWeibull確率紙に表したものである。また、図5はこれらを損傷関数とした場合の応力-ひずみ関係である。一方、図6-8はmを一定とし、ξを変えたものである。

式(4)を応力(σ)とひずみ(ε)で表し、ピーク強度を $\sigma_{ok}$ とすると次式が得られる。

$$\sigma_{ok} = \{1 - F(\varepsilon_{ok})\} E \varepsilon_{ok} \quad (11)$$

ここで、ピーク時の損傷確率分布関数についてつぎの重要な結果が導かれる。すなわち、このとき式(10)が成立するからこれを変形して、式(7)、(9)を用い、さらに $x = \varepsilon_{ok}$ とおくと次式を得る。

$$F_{ok} = 1 - e^{-1/m} \quad (12)$$

ここに $F_{ok}$ はピーク強度を与える損傷確率である。

式(12)より、ピーク強度を与える損傷確率はmのみの関数であり、もう一方のパラメータξによらない。すなわち、損傷確率分布の中心の位置によらず、その分布の形状(バラツキ)によって決まるある一定の損傷確率に達したときピーク強度を示すことがわかる。そして、分布のバラツキの小さい(mの大きい)ほどピーク時の損傷確率は小さい。ただし、すでに述べたようにピークを与えるひずみあるいは応力は式(10)あるいは式(11)に示すように、ξに比例して増加する。

損傷関数F(x)が与えられると破壊によって生じる塑性ひずみを求めることも可能である。塑性ひずみを $\varepsilon_0$ 、全ひずみをεとすると、図1に示すような関係から弾性変位 $u_0$ および塑性変位 $u_0$ をそれぞれひずみ

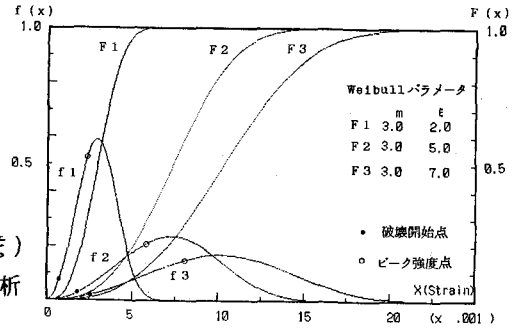


図6 ξを変えたWeibull分布

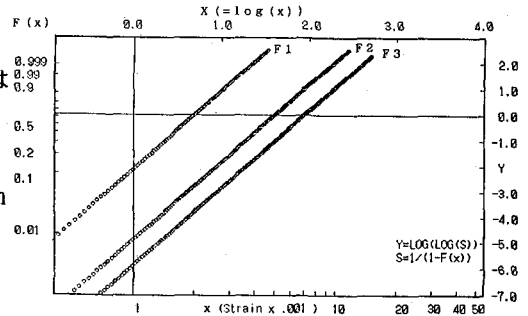


図7 同上 (Weibull 確率紙)

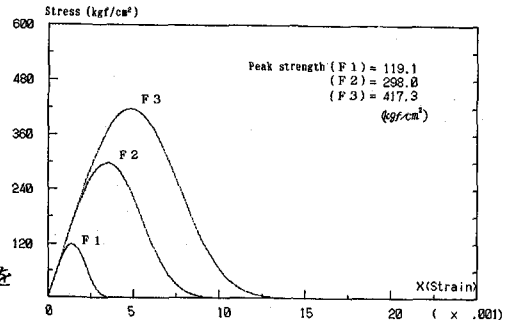


図8 図6に対応するσ-ε関係

で表すと次式を得る。

$$\varepsilon_o / \varepsilon = F(x) \quad (13)$$

式(13)は任意のひずみ $x$ の点における全ひずみに対する塑性ひずみの割合を示し、 $F(x) \rightarrow 1$ のときすべてが塑性ひずみとなる。福島ら<sup>8)</sup>もこれと類似の式を与えている。

## (2) 破壊開始とピーク強度との関係 (構造的破壊靱性)

破壊開始とピーク強度あるいはピークひずみとの関係を知っておくことは、例えばAEなどで岩石あるいは岩盤の破壊挙動を予測する場合に重要である。ここではWeibull分布を適用した場合の両者の関係を、応力とひずみの両方の場合について求め比較を行う。

本文で用いている式(7)の2母数Weibull分布では、理論的には与えられるひずみが0に極めて近いときが破壊開始であると考えられるが、ここでは損傷確率 $F(x)$ が1% ( $F(x)=0.01$ ) を越えるときを一応破壊開始と仮定する。このときの応力およびひずみを $\sigma_o$ および $\varepsilon_o$ として次式を定義する。

$$\alpha_o = \sigma_{ok} / \sigma_o \quad (14)$$

$$\alpha_\varepsilon = \varepsilon_{ok} / \varepsilon_o \quad (15)$$

破壊開始を求めるためには具体的に $m$ 、 $\xi$ を与えて数値計算が必要である。図9は $m$ をパラメータとしてその結果を示したものである。同図より明らかなように、 $\alpha_o$ および $\alpha_\varepsilon$ はいずれも損傷関数のバラツキが小さい( $m$ が大きい)ほど小さくなっている。 $m$ が3以上では両者ともにおよそ1~3の範囲にあり、均質な材料ほど急速に損傷が生じて、そのピーク時の応力あるいはひずみを予測することが困難となることを示している。一方、同図に示した直線の勾配は1より小さく、 $\alpha_\varepsilon$ の方が $\alpha_o$ より大きい。すなわち、測定上の精度を考えないとき、ひずみでピーク点をモニターした方が有利であることがわかる。そして、 $m$ が小さいほどその傾向は顕著となる。 $m$ が非常に大きいとき両者はほぼ一致し、その値は約1となる。 $\alpha_\varepsilon$ が $\alpha_o$ より $m \rightarrow \infty$ の場合を除いて常に大きい理由は、破壊開始後ピーク点までの応力-ひずみ関係が非線形となることに起因している。

## (3) ひずみ軟化率

次にピーク強度以後のいわゆる”軟化”挙動を検討するために次式を定義し、本文ではこれをひずみ軟化率 $\Theta$ と称することとする。

$$\Theta = (\sigma_{ok} - \sigma_{res}) / \sigma_{ok} \quad (16)$$

ここに $\sigma_{res}$ はいわゆる残留強度であり、式(11)に $x > \varepsilon_{ok}$ を満足するひずみを与えることにより求められる。したがって式(16)は次式で与えられる。

$$\Theta = 1 - \frac{\varepsilon_n}{N} \exp \left\{ \frac{1}{m} - (\varepsilon_n)^m \right\} \quad (17)$$

ここに $\varepsilon_n = \varepsilon / \xi$ であり、ひずみ $\varepsilon$ を $\xi$ で除して正規化している。図10はピーク強度点の正規化ひずみ $\varepsilon_n^*$  ( $= \varepsilon_{ok} / \xi$ ) を原点とし、 $\varepsilon_n / \varepsilon_n^*$ をよこ軸で表した場合の式(17)のグラフである。同図より、 $m \geq 5$ においては $\varepsilon_n = \varepsilon_n^*$ 、すなわち正規化された全ひずみが正規化ピークひずみの2倍 ( $\varepsilon_n = 2 \varepsilon_n^*$ ) 程度の変形を与えられることにより完全に軟化することがわかる。また、 $m$ が小さいほど完全軟化まで

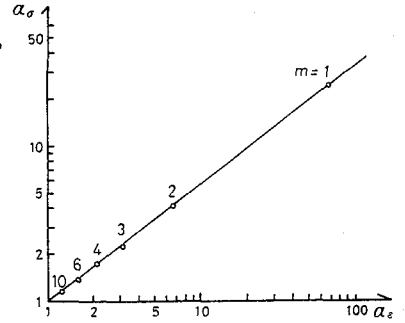


図9  $m$ をパラメータとした  
 $\alpha_o$ と $\alpha_\varepsilon$ の関係

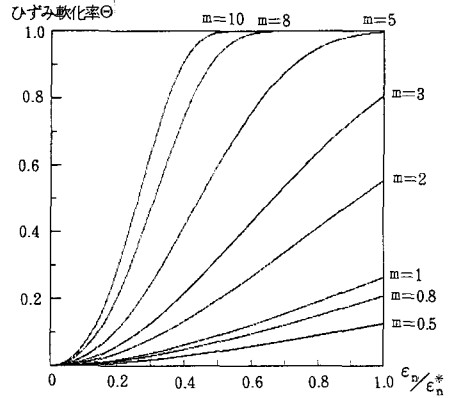


図10 ひずみ軟化率 $\Theta$ と  
正規化ひずみ $\varepsilon_n^*$ の関係

に大きな変形を必要とする。したがって、 $m$ によって決まるある一定の正規化ひずみに達するとき残留強度 ( $\sigma_{res}$ ) は0となる。

#### (4) ひずみ硬化

ひずみ硬化は式(5)の左辺が常に正であるときに生じる。したがって、式(10)を考慮するとひずみの硬化が生じる条件として次式を得る。

$$(x/\xi) = \varepsilon_n < N \quad (18)$$

式(18)はひずみ硬化が認められる正規化ひずみの範囲を示している。ここに $N$ は式(9)で示すように $m$ の関数であり、すでに図2に示した。同図の曲線が $\varepsilon_n = N$ 、すなわち正規化ピークひずみが $m$ によって変化する様子を表しており、 $\varepsilon_n$ がこれ以下のとき、すなわち図の斜線部の領域にあるとき、ひずみ硬化が観察される。そしてこの曲線上にあるときがピーク強度でありこれを越えるときひずみ軟化を示す。したがって、ひずみ硬化とは応力-ひずみ曲線が非線形状態となる点(厳密には破壊開始点)から、ピーク強度点までの挙動を指しており、この領域が大きいほどひずみ硬化が顕著に観察されることを意味している。

#### 4. 考察およびまとめ

破壊開始とピーク強度との関係についてはすでに若干の実験を行い、スリットを与えた場合の微視クラックの挙動<sup>11)</sup>において、 $\alpha_o = 1.5-3$ 程度であることを報告した。また、構成要素の強度の確率密度とそのバラツキを変えて、ピーク強度やそれまでの破壊確率( $F_{ok}$ )について簡単な考察<sup>12)</sup>を行ったが、ここにおいても $\alpha_o$ は同程度であり、また、バラツキに比例して $\alpha_o$ が増加する傾向や $F_{ok}$ の増加現象も本考察によって理論的根拠が与えられたと考えられる。なお、応力状態、試験条件などによる影響や、ダイレタンシーなどについては今後の課題である。また、同一条件下で異なる種類の岩石の損傷関数を求めることにより、材料の持つ確率的要素を損傷関数のパラメータという形で定量的に比較することが可能になるものと考えられる。実験によって得られる具体的な損傷確率関数については、別途報告する予定である。

本文は次のようにまとめられる。

(1) 損傷確率分布に2母数Weibull分布を用いるとピーク強度が解析的に求められ、またひずみ軟化やひずみ硬化の程度を定量的に評価可能である。(2) ピーク強度を与える損傷確率は分布のバラツキを表すパラメータ $m$ のみによって決定され、もう一方のパラメータ $\xi$ によらない。(3) ピーク強度点の応力およびひずみと、破壊開始点の応力およびひずみのそれぞれの比を材料の構造的破壊靱性( $\alpha$ )として評価したが、 $m \geq 3$ の範囲では両者とも1~3と計算されたが、 $m$ によらず常にひずみによるものの方が応力のそれより大きく、一定ひずみ速度下ではピーク強度点をひずみでモニターする方が有効である。

【参考文献】1) 吉中龍之進・阿部健一・清水昭男・森田栄治：第6回岩の力学国内シンポジウム講演論文集，pp.61-66, 1984. 2) 川本眺万・渡嘉敷直彦・石塚与志雄：第14回土質工学研究発表会講演概要集，pp.1385-1388, 1982. 3) 福島篤・木下重教：日本鉱業会誌，Vol.90, No.1042, pp.769-774, 1974. 4) Brace, W.F., Paulding, B.W. and Scholz, C.H.: J. Geophys. Res., Vol.71, No.16, pp.3939-3953, 1966. 5) Bieniawski, Z.T.: Int. J. Rock Mech. Min. Sci., Vol.4, pp.407-423, 1967. 6) Kranz R.L.: Tectonophysics, Vol.100, pp.449-480, 1983. 7) Brady, B.T., Duvall, W.I. and Horino, F.G.: Rock Mechanics, Vol.5, pp.107-120, 1973. 8) 京谷孝史・市川康明・川本眺万：土木学会 論文集，III-3, No.358, pp.27-35, 1985. 9) Р ж а н и ц ы Н, А.Р. (高岡宣善訳)：構造物の信頼性解析，pp.159, 丸善，1980. 10) Weibull, W.: J. of Appl. Mech. Vol.18, pp.293-297, 1951. 11) 田野久貴・佐武正雄：土木学会第26回年次学術講演会講演集，第3部，pp.1-4, 1971. 12) 田野久貴・佐武正雄：第5回岩の力学国内シンポジウム講演集，pp.55-59, 1977.