

(22) クラックテンソルによる微視クラックの表現とその応用

東北大学大学院 学生員 ○仲沢 武志
東北大学工学部 正 員 佐武 正雄

Expression of Microcracks by using Crack Tensor and its Application

Tohoku Univ. Takeshi Nakazawa
Tohoku Univ. Masao Satake

In study of mechanical properties of the brittle materials such as concrete and rocks, it is fundamentally important to clarify the microstructure due to microcracks and its effect on the overall mechanical property. Mechanical effects of microcracks are studied using the eigenstrain from the ellipsoidal inclusion method proposed by Eshelby and the microcracks in the material are expressed by the crack tensor. The relations between the eigenstrain and the crack tensor and a simple example of application are shown.

1. まえがき

コンクリートや岩石のようなぜい性材料を解析する際には、プロセスゾーンのような微視クラックによる微視構造の表現と、微視クラックが巨視的力学特性に及ぼす影響を明らかにすることが重要である¹⁾。そこで、筆者等は、微視クラックの力学的な効果をEshelbyの楕円体介在物法による固有ひずみ(eigenstrain)で評価し、これと微視クラックの空間分布の表現であるクラックテンソルの対応づけを行った。本文は、その内容を簡単な例題とともに示したものである。

2. 楕円体介在物法によるクラック問題に対する固有ひずみ²⁾

Eshelbyの楕円体介在物法とは、弾性係数 C_{ijkl} をもつ介在物が、等方な無限弾生体内に存在する場合、その力学的な影響を母材の弾性係数 C_{ijkl} と固有ひずみ ε_{ij}^* によって表現する方法である。この楕円体介在物法を図-1のような2次元スリット状のクラック問題に適用すれば、領域面積 A 内の平均的な固有ひずみは、平面応力状態で次のように求めることができる。

$$\varepsilon_{11}^* = 0 \quad \varepsilon_{22}^* = \frac{1}{A} \frac{2\pi a^2}{E} \sigma_{22} \quad \varepsilon_{12}^* = \frac{1}{A} \frac{\pi a^2}{E} \sigma_{12} \quad (1)$$

ここに、 E は母材のヤング率、 $2a$ はクラックの長さを示す。

3. クラックテンソルと固有ひずみの関係

クラックテンソルと固有ひずみを対応づけ、微視クラックの影響を考慮した構成則を提案するために、亜弾性理論を参考とする。亜弾性理論における材料の構成則は、次式のようなものである。

$$\dot{\sigma}_{ij} = P_{ij}(\dot{\varepsilon}_{kl}, \sigma_{mn}, \varepsilon_{ab}) \quad \text{あるいは} \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = Q_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}, \sigma_{mn}, \varepsilon_{ab}) \quad (2)$$

したがって、次式のように表現することができる。

$$P(\dot{\sigma}_{ij}, \sigma_{kl}, \dot{\varepsilon}_{ab}, \varepsilon_{cd}) = 0 \quad (3)$$

ここで、クラックテンソルを次式のように定義する。⁴⁾

$$F_{ij} = \frac{2\pi}{A} \sum_N a_N^2 \frac{n_i n_j}{N} \quad (4)$$

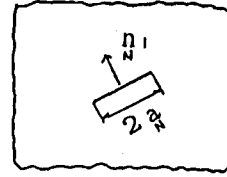


図-1 スリット状クラック

ここに、 F_{ij} はクラックテンソル、 n_i はクラック面法線ベクトルを示す。
式(3)にクラックテンソルを導入し、次式のように仮定する。

$$P(\dot{\sigma}_{ij}, \sigma_{kl}, \dot{\varepsilon}_{ab}, \varepsilon_{cd}, \dot{F}_{mn}, F_{op}) = 0 \quad (5)$$

考察の第1段階としては、弾性的な挙動、すなわち、クラックテンソルの変化を考慮しないような、応力とひずみ、さらにクラックテンソルによる次式のような構成則を考える³⁾。

$$P(\sigma_{ij}, \varepsilon_{kl}, F_{mn}) = 0 \quad (6)$$

さらに、式(6)を次式のように単純化する。

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(F_{mn}) \varepsilon_{kl} \quad \text{あるいは} \quad \varepsilon_{ij} = D_{ijkl}(F_{mn}) \sigma_{kl} \quad (7)$$

ここでは、式(7)第2式を用いて考察を進める。

コンプライアンス D_{ijkl} は、クラックテンソルを引数として展開し、簡単のためにクラックテンソルの2次以上の項を省略すれば、次式を得る。

$$D_{ijkl} = (a_1 + a_2 F_{rr}) \delta_{ij} \delta_{kl} + a_3 (F_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ij} F_{kl}) + (a_4 + a_5 F_{rr})(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) + a_6 (F_{ik} \delta_{jl} + F_{jk} \delta_{il} + F_{ji} \delta_{ik} + F_{il} \delta_{jk}) \quad (8)$$

ここに、 $a_1 \sim a_6$ は材料定数である。以下に、これらの値を求める。

クラックテンソルがゼロの場合、母材の挙動となるので、式(7)における係数 a_1, a_4 は次のように求められる。

$$a_1 = -\frac{\nu}{E} \quad a_4 = \frac{1+\nu}{2E} \quad (9)$$

式(8)の他の係数は固有ひずみを表すものである。クラックテンソルの定義式(4)と固有ひずみ式(1)より、これらの係数を求める。

考える座標系をクラックテンソルの主軸とし、その座標系における応力テンソルの成分にプライム(')をつけて表せば、式(8)より、固有ひずみは次式のように求められる。

$$\varepsilon_{11}^* = (a_2 + 2a_3 + 2a_5 + 4a_6) F_{11} \sigma'_{11} + (a_2 + a_3) F_{11} \sigma'_{22} + (a_2 + 2a_5) F_{22} \sigma'_{11} + (a_2 + a_3) F_{22} \sigma'_{22} = \frac{1}{E} F_{11} \sigma'_{11}$$

$$\varepsilon^*_{22} = (a_2 + a_3)F_{11}\sigma'_{11} + (a_2 + 2a_5)F_{11}\sigma'_{22} + (a_2 + a_3)F_{22}\sigma'_{11} + (a_2 + 2a_3 + 2a_5 + 4a_6)F_{22}\sigma'_{22} = \frac{1}{E} F_{22}\sigma'_{22}$$

$$\varepsilon^*_{12} = (2a_5 + 2a_6)F_{11}\sigma'_{12} + 2(a_5 + a_6)F_{22}\sigma'_{12} = \frac{1}{E} (F_{11} + F_{22})\sigma'_{12} \quad (10)$$

これより、材料定数の間に、次式のような関係を得る。

$$a_2 + 2a_3 + 2a_5 + 4a_6 = \frac{1}{E}, \quad a_2 + a_3 = 0, \quad a_2 + 2a_5 = 0, \quad 2(a_5 + a_6) = \frac{1}{2E} \quad (11)$$

よって、式(10)の係数は次式のように得ることができる。

$$a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = \frac{1}{4E} \quad (12)$$

したがって、微視クラックの影響を考慮した構成則として次式を得る。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon^*_{ij} = \left(-\frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1+\nu}{E} \delta_{ik} \delta_{jl} \right) \sigma_{kl} \\ &\quad + \frac{1}{4E} (F_{ik} \delta_{jl} + F_{jk} \delta_{il} + F_{il} \delta_{jk} + F_{jl} \delta_{ik}) \sigma_{kl} \\ &= D_{ijkl} \sigma_{kl} + L_{ijkl} \sigma_{kl} \end{aligned} \quad (13)$$

ここに、 ε_{ij} は母材の弾性ひずみ、 D_{ijkl} は母材のコンプライアンス、 L_{ijkl} は微視クラックの力学的効果を表す4階のテンソルである。

次に、破壊力学で定義されているエネルギー解放率を求めるために、ポテンシャルエネルギーの変化 ΔW の計算方法について考察する。これは、次式のようにして得られる。

$$\Delta W = -\frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon^*_{ij} \quad (14)$$

クラックテンソルが単位領域当たりの平均的な量で定義されることから、単位領域当たりの平均的なポテンシャルエネルギーの変化量を定義し、これを ΔW_u で表せば、 ΔW_u は、式(13)から得られる固有ひずみを式(14)に代入して、次式のように算出される。

$$\Delta W_u = -\frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon^*_{ij} = -\frac{1}{2} L_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \quad (15)$$

よって、単位領域当たりの平均的なエネルギー解放率 g_u は次式のように計算される。

$$g_u = \frac{\partial}{\partial \langle a \rangle} \left\{ -\frac{1}{2} L_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \right\} \quad (16)$$

ここに、 $2\langle a \rangle$ は、平均的なクラックのサイズである。

4. 簡単な例題への適用

簡単な例題として、3. で誘導した構成則式(13)を、図-2に示すような規則的な配列のクラックによる微視構造⁶⁾に適用する。このような微視構造は、次式のようなクラックテンソルで表現される。

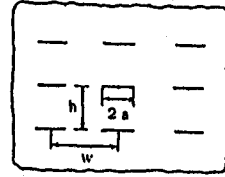


図-2 規則的配列のクラック

$$F_{ij} = \frac{2\pi a^2}{hw} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

式(17)を式(13)に代入すれば、母材の弾性係数に対するクラックの影響を考慮した全体的な弾性係数の割合は、次式のように求められる。

$$\frac{\bar{E}}{E} = \frac{1}{1+2 \frac{\pi a^2}{hw}} \quad \frac{\bar{G}}{G} = \frac{1}{1+2 \left(\frac{G}{E} \right) \frac{\pi a^2}{hw}} \quad (18)$$

ここに、 G はせん断弾性係数である。式(18)をクラックの密度に対して表したものが、図-3である。

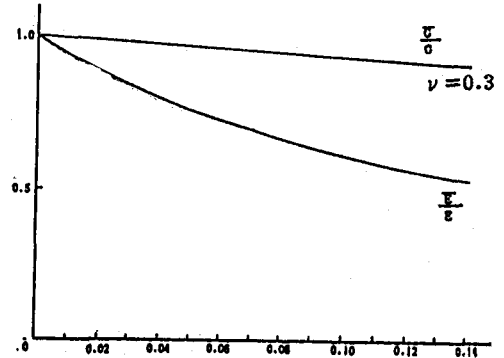


図-3 クラック密度に対する弾性係数の変化

5. クラックテンソルを考慮した強度基準に対する考察

3. においてクラックテンソルを考慮した弾性的な構成則について考察した。微視クラックによる微視構造は、外力の増加に伴い変化すると考えられることから、微視クラックの変化を考慮した構成則を考える必要がある。そのために、まず、微視クラックの成長基準について考察する。

微視構造を構成する微視クラックの挙動は、個々のクラックで異なると考えられるが、第1次近似として、次式のような異方性材料に対する降伏関数で微視クラックの成長基準を表すことができるものとする⁶⁾。

$$J = J(\sigma_{ij}, F_{kl}, r) \quad (19)$$

ここに、 r は基準とする強度であり、ここでは、载荷方向にクラック面法線ベクトルを有する場合の一軸圧縮強度を用いる。

微視クラックの成長を規定する関数 J を式(19)に示す変数を用いて展開するが、考察の第1段階として、応力に対する1次の同次形とし、次式のように考える。

$$J = G_{ij} \sigma_{ij} + \sqrt{H_{ijkl} \sigma'_{ij} \sigma'_{kl}} - r \quad (20)$$

ここに、 σ'_{ij} は偏差応力、 G_{ij} 、 H_{ijkl} は、式(8)と同様に、クラックテンソルを引数とした等方テンソル値展開される係数である。ここでは、異方性の表す性質と計算の便宜を考慮して、クラックテンソルの関数 J への寄与は、それぞれの項で応力と同次であるものとし、異方性の影響を主な考察の対象とすることから、クラックテンソルのスカラー不変量は考慮しないものとする。このように考えた場合、 G_{ij} 、 H_{ijkl} は次式ようになる。

$$G_{ij} = g F_{ij}$$

$$H_{ijk1} = h_1 (\delta_{ij} F_{kq} F_{q1} + \delta_{k1} F_{iq} F_{qj}) + h_2 F_{ij} F_{k1}$$

$$+ h_3 (F_{ir} F_{rk} \delta_{ij} + F_{kr} F_{rj} \delta_{ij} + F_{ir} F_{r1} \delta_{kj} + F_{ir} F_{rj} \delta_{ik}) \quad (21)$$

ここに、 $g, h_1 \sim h_3$ は材料定数であるが、 $\delta_{ij} \sigma'_{ij} = 0$ であるので、 h_2 は任意である。そこで、ここでは、簡単のために、 h_2 をゼロとする。赤井等⁷⁾による結晶性片岩に対する実験結果にこの基準を適用する。各々の片岩に対して表-1のように材料定数を定めれば、各片岩に対して図-4のように強度を得る。全体的な傾向は、実験結果を良く表現しているように思われる。

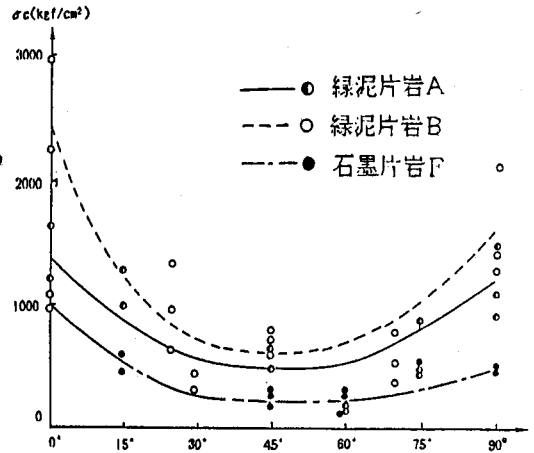


図-4 片岩供試体の一軸圧縮試験における crack 方向と強度の関係

6. あとがき

微視クラックによる微視構造をクラックテンソルで表現し、それを考慮した構成則を提案した。さらに、提案した構成則の応用として、単純な微視構造に適用した。また、クラックテンソルを考慮した強度基準を考察し、赤井等による実験結果に適用し、良好な結果を得た。

ここでは、ごく簡単な場合を示したが、ランダムなクラック分布についても、これをクラックテンソルで統計的に表現することにより、材料の力学特性を評価することが可能である。

クラックテンソルの変化を考慮した構成則についてさらに考察を進めたいと考えている。

表-1 各岩に対する材料定数

岩石	gF_{22}	h_1F_{22}	h_3F_{22}	$r(kgf/cm^2)$
緑泥片岩A	0.16	-27.8	8.30	1400
緑泥片岩B	0.58	-62.4	18.1	2525
石墨片岩F	1.17	-86.3	26.3	1025

参考文献

- 1) Proc. International Workshop on Fracture Toughness and Fracture Energy - Test Methods for Concrete and Rock -, H. Mihashi et al. (Eds.), Tohoku University, Sendai Japan
- 2) T. Mura: Micromechanics of Defects in Solids, 2nd ed., Martinus Nijhoff, the Hague, 1987
- 3) S.C. Cowin: "The Relationship Between The Elasticity Tensor And The Fabric Tensor", Mechanics of Materials 4, 1985
- 4) M. Oda, K. Suzuki and T. Maeshibu: "Elastic Compliance for Rock-like Materials with Random Cracks", Soils and Foundation, Vol. 24, No. 3, 1984
- 5) K. Sahasakmontri, H. Horii, A. Hasegawa and F. Nishino: "Mechanical Properties of Solids Containing a Doubly Periodic Rectangular Array of Cracks", Structural Eng./Earthquake Eng., Proc. of JSCE, Vol. 4, no. 1, 1987
- 6) S.C. Cowin: "Fabric Dependence of An Anisotropic Strength Criterion", Mechanics of Materials 5, 1986
- 7) 赤井浩一、山本和夫、有岡正樹: 結晶性片岩の構造異方性に関する実験的研究、土木学会論文集、第170号、1969