

(2) コッセラ弾性体による不連続性岩盤のモデル化

埼玉大学工学部 正会員 小田匡寛

Modelling of Discontinuous Rock Masses by Cosserat Theory

Masanobu Oda, Saitama University

Abstract

Couple stress is shown to be a controlling factor in the analysis of elasticity for discontinuous rock masses. Elastic constitutive equations dealing with the relation between the couple stress and the curvature are formulated in terms of stiffness values of geological discontinuities. A characteristic length, which is a material property associated with the couple stress theory, is as large as a typical size of actual excavations in discontinuous rock masses.

1. はじめに

岩盤の水理・力学的挙動を解析するには、基質の岩石と共に地質不連続面の特性を正しく評価してモデルに取り込まねばならない。今、地質不連続面の密度が高く、その特性のみで岩盤の水理・力学的挙動が決定づけられる場合について考えよう。(今後、このような岩盤を特に不連続性岩盤と呼ぶことにする。)このような不連続性岩盤を扱う場合、基質の岩石部分は実質的に不透水の剛体とみなすことができ、従って、岩盤の変形や透水は全て不連続部分の挙動と関連づけて議論できる。このような理想化は、粒子の集合体である粒状体のマイクロメカニクスを論ずる際、よく採用される。すなわち、構成粒子を剛体とみなし、全体の巨視的な弾性や塑性、あるいはさらに破壊までも、粒子接点でのミクロな挙動と関係づけて論じられる。

不連続性岩盤を論ずる前に、粒状体の巨視的応力テンソル $\bar{\sigma}_{ij}$ を例として考えてみよう。球粒子の集合体に ν を単位法線ベクトルとする平面(ν -平面と呼ぶ)を見てみよう。すると、 ν -平面近傍の粒子は、 ν -平面に関して二つのグループに分けることができる。すなわち、球の中心が ν -平面より上にあるA-グループと、 ν -平面より下にあるB-グループの二つであ

る。 ν -平面の巨視的応力は、A-グループの粒子からB-グループの粒子へ共通の接点を通じて伝達される粒子間力 f に基づいて定義できる。すなわち、 ν -平面の応力ベクトル $T^{(\nu)}$ は、 ν -平面の単位の面積に伴われる全ての接点(総数を $N^{(\nu)}$ とする)に作用する粒子間力の合力 $f^{(\alpha)}$ に等しい。

$$T^{(\nu)} = \sum_{\alpha=1}^{N^{(\nu)}} f^{(\alpha)} \quad (1)$$

実験によると、粒子間力の大きさは接点での接平面に立てた単位法線ベクトル n に大きく依存するので、近似的に $f^{(\alpha)} = f(n)$ と仮定できる。若干の計算の後、(1)式は次のように書き改められる¹⁾。

$$T_i^{(\nu)} = [N \bar{\ell} \int_{\Omega} f_i n_j E(n) d\Omega] \nu_j \quad (2)$$

ただし、 N は単位体積あたりの接点数、 $\bar{\ell}$ は共通接点を持つ二つの粒子の中心間距離の平均値、 f_i, n_j はそれぞれベクトル f, n の x_i 軸への成分である。また、 $E(n)$ は単位ベクトル n の密度関数であり、 n を中心とする微小立体角 $d\Omega$ に入る法線ベクトルの割合は $E(n)d\Omega$ で与えられる。(2)式は、さらに、

$$T_i^{(\nu)} = \bar{\sigma}_{ji} \nu_j \quad (3)$$

ただし、

$$\bar{\sigma}_{ij} = N \hat{\ell} \int_{\Omega} f_i n_j E(n) d\Omega \quad (4)$$

と書けることに注意すれば、巨視的応力テンソル $\bar{\sigma}_{ij}$ は粒子間力 f と法線ベクトル n によって定義されたことになる。

不連続性岩盤に議論を限定するとすれば、次節に述べるように、不連続面に作用する力の観点から巨視的応力が定義できる。

2. 不連続性岩盤における偶応力

2.1 偶応力導入の必然性

粒状体の粒子は互いに点で接しているとみてよいので、粒子間に作用する力は接点に着力点を持つベクトル f で十分記述できる。一方、不連続性岩盤の地質不連続面は面的な広がりを持っていて、不連続面を介して伝達される力を、着力点が面の中心にあるベクトルとして表すには相当に無理があるものと思わねばならない。

面積 A の不連続面に合力 f が作用しているとする。 f_n (大きさ f_n) を f の面に垂直(x_2 軸方向)な成分、 f_s (大きさ f_s) を f の面内(x_1 軸方向)の成分とすれば、面積 A に作用する平均的な垂直応力 t_{22} 、せん断応力 t_{21} はそれぞれ

$$t_{22} = \frac{1}{A} f_n, \quad t_{21} = \frac{1}{A} f_s \quad (5)$$

としてよい。しかし、 t_{22} , t_{21} は面に均一に分布しているわけではなく、(5)式のみでは、力に関する情報の一部が欠落しているとみななければならない。事実、地質不連続面はいかに平面に見えたとしても、一般に凹凸やうねりを伴っていて、その結果、垂直応力やせん断応力の伝達も同様ではなく、非対称なうねりを生じているとみななければならない。

今、単位長さの奥行きを持つ長さ r の不連続面上で(従って、 $A = r \times 1$)、垂直応力の分布を考えてみよう。垂直応力の非対称な周期的なうねりをFig.1の分布で近似してみる。このような垂直応力の分布は、(5)式の平均的な垂直応力 t_{22} と、次に定義する偶応力 m_{23} (全偶力を面積で除したもの)によって力学的効果を近似的に表せる。

$$m_{23} = \frac{1}{\alpha} \frac{(\sigma_a - \sigma_b)}{12} r \quad (6)$$

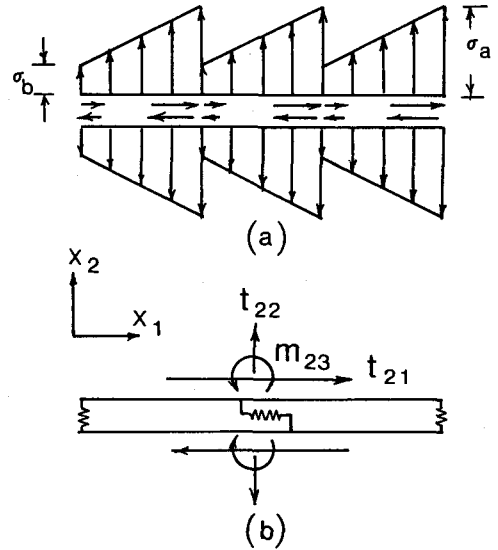


Fig.1 (a) Non-symmetric distribution of stresses on a discontinuous plane and (b) its model equivalent to (a)

ただし、 α はうねりの数であり、 σ_a , σ_b はそれぞれうねりの山と谷部における局所的な垂直応力である。(偶応力の最初の下添字の2は、偶応力の作用する面の法線 x_2 軸を、また2番目の下添字の3は偶応力の向きである x_3 を示している。)

不連続性岩盤の変形は、その定義によって、全て不連続面での変形に帰着してよい。今、不連続面上での弾性変形は、2枚の剛板の端点に置かれた2個の垂直バネと、中央に置かれた1個のせん断バネによって起こるとしよう。応力成分 t_{22} , t_{21} は、(7)式に示す通り、伸び $\delta^{(n)}$ とずり $\delta^{(s)}$ の変位を引き起こす。

$$\delta^{(n)} = \frac{r}{2k_n} t_{22}, \quad \delta^{(s)} = \frac{r}{k_s} t_{21} \quad (7)$$

ただし、 k_n , k_s はそれぞれ単位奥行き当りの垂直バネ剛性、せん断バネ剛性であって、応力の次元を持っている。一方、偶応力は不連続をはさんだ2枚の剛板の相対的な回転 $\Delta\omega_3$ と次の関係にある。(下添字の3は回転軸 x_3 を示す。)

$$\Delta\omega_3 = \frac{1}{k_\omega} m_{23} \quad (8)$$

ただし、 k_ω は $\Delta\omega_3$ と m_{23} の関係を結びつける一つの係数であるが、

$$k_{\omega} = \frac{r}{2} k_n \quad (9)$$

の関係が成立する。

以上の考察から、不連続面に作用する非対称なうねりは、偶応力を導入することによって近似的ながらその力学的な効果を表せ、また偶応力は不連続面を介して相対的な回転を生ずる、等のことが明らかになった。(しかし、せん断応力のうねりの効果はこのモデル化においても表現されていない事を注意しておきたい。)

2.2 巨視的応力

粒状体の場合と同様、不連続性岩盤中に ν を単位法線ベクトルとする ν -平面を考える。不連続面によって分割されたブロックは、その重心の位置によって二つのグループに分類できる。一方のグループのブロックから他のグループのブロックに伝達される全ての力と力のモーメントを加え合わせることによって、巨視的な応力テンソル T_{ij} と偶応力テンソル M_{ij} が、(3)、(4)式の形式で表せる。粒状体の場合との差は偶応力の有無にあるといえる。またKroner(1993)²⁾は、格子欠陥が金属中に規則的に分布する場合の偶応力について論じているが、ここで述べた不連続面の存在による偶応力と似ていて興味深い。

3 コッセラ弾性体の基礎方程式

すでに明らかのように、不連続性岩盤の巨視的応力には偶応力の概念が含まれなければならない。偶応力を取り入れた弾性論としてコッセラ弾性学が有名である。本節では、Mindlin(1963)³⁾の解説を参考にして、二次元コッセラ弾性体の基礎方程式を示しておく。(ただし、 x_3 軸方向に歪を拘束した平面歪の場合とする。)

u を変位ベクトルとすれば、歪テンソル ε_{ij} は、

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \equiv u_{(i,j)} \quad (i, j = 1, 2) \quad (10)$$

ただし、下添字のカンマは、例えば、 $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$ を意味し、また下添字中の()の記号は、添字に対する対称化を表すものとする。一方、回転 ω_3 は、平面歪であることを考えると、

$$\omega_3 = \frac{1}{2}(u_{2,1} - u_{1,2}) \quad (11)$$

のみが重要である。

巨視的な応力テンソルと偶応力テンソルをそれぞれ T_{ij} と M_{i3} で表す。簡単のために物体力と物体偶力は無視できるものと仮定して、微小要素に作用する力と力のモーメントのつりあいを考えると、

$$T_{ji,j} = 0 \quad (12)$$

$$M_{i3,i} + \varepsilon_{ij} T_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2) \quad (13)$$

が成立する。 ε_{ij} は交代記号で、 $\varepsilon_{12} = 1$, $\varepsilon_{21} = -1$, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$ とする。(13)式によると、偶応力 M_{i3} に勾配があると($M_{i3,i} \neq 0$)、応力テンソル T_{ij} は $T_{12} \neq T_{21}$ の非対称となる。また、(12)式は偶応力を考えない普通の弾性論でも成立するつりあい式にほかならない。従って、コッセラ弾性体では、力のモーメントのつりあいを記述する(13)式が付加されたことになる。

4 弾性構成式

衆知の通り、(12)～(13)式のつりあい式だけでは問題を解くことはできない。歪と応力、曲率と偶応力の関係を記述する弾性構成式が不可欠である。

4.1 歪と応力の関係

歪テンソル ε_{ij} を応力テンソルの対称部分 $T_{(kl)}$ と関係づけるのは自然である³⁾。(回転 ω_3 は、応力の非対称部分によって説明される。)従って、

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl} T_{(kl)} \quad (i, j, k, l = 1, 2) \quad (14)$$

ここで、 C_{ijkl} は弾性コンプライアンスである。例えば、平面歪条件で等方弾性体を考えれば、ヤング率 E とポアソン比 ν を用いて、(14)式は簡単な次式を意味している。

$$\varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E} [T_{11} - \nu(T_{11} + T_{22})] \quad (15)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E} [T_{22} - \nu(T_{11} + T_{22})] \quad (16)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{(1+\nu)}{2E} (T_{12} + T_{21}) \equiv \frac{1}{4G} (T_{12} + T_{21}) \quad (17)$$

ここで、 G はせん断剛性率である。

不連続性岩盤のモデル化において、発生する弾性歪は不連続面のバネの変形に帰着できるものとした。この単純化を受け入れれば、(14) 式の弾性コンプライアンス C_{ijkl} は、次式で与えられる⁴⁾。

$$C_{ijkl} = \left(\frac{1}{2k_n} - \frac{1}{k_s} \right) F_{ijkl} + \frac{1}{4k_s} (\delta_{ik} F_{jl} + \delta_{jk} F_{il} + \delta_{il} F_{jk} + \delta_{jl} F_{ik}) \quad (18)$$

($i, j, k, l = 1, 2$)

ここで、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり、また F_{ij} 、 F_{ijkl} はそれぞれ不連続面の幾何学を表す 2 階、4 階のテンソルであって、次式で定義される。(ただし、文献 4) では、 $2k_n, k_s$ に代わってそれぞれ $\bar{h}, \bar{g}$ の記号を用いている。)

$$F_{ij} = \rho \int_0^{r_m} \int_{\Omega} r^2 n_i n_j E(n, r) d\Omega dr \quad (19)$$

$$F_{ijkl} = \rho \int_0^{r_m} \int_{\Omega} r^2 n_i n_j n_k n_l E(n, r) d\Omega dr \quad (20)$$

ただし、 ρ = 単位面積当りの不連続面の個数、 r = 単位長さの奥行きを持つ不連続面の長さ (r_m はその最大値)、 n_i = 不連続面に立てた単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ の x_i 軸 ($i = 1, 2$) への成分、 $E(n, r)$ = 不連続面の分布を表す密度関数。今、不連続面が等方な分布をする特別な場合 (従って、 F_{ij} 、 F_{ijkl} は等方テンソル) を考えると、(18) 式を用いた (14) 式は、

$$\varepsilon_{ij} = \frac{F_0}{8} \left(\frac{1}{2k_n} - \frac{1}{k_s} \right) T_{kk} \delta_{ij} + \frac{F_0}{4} \left(\frac{1}{2k_n} + \frac{1}{k_s} \right) T_{(ij)} \quad (21)$$

と書ける。ただし、 F_0 は F_{ij} のトレース F_{ii} に等しい。例えば、(21) 式で $i = 1, j = 2$ と置けば、

$$\varepsilon_{12} = \frac{F_0}{8} \left(\frac{1}{2k_n} + \frac{1}{k_s} \right) (T_{12} + T_{21}) \quad (22)$$

となり、せん断歪とせん断応力の関係を与えている。(22) 式と等価なせん断剛性率 G は、 k_n と k_s を用いて

$$\frac{1}{G} = \frac{F_0}{2} \left(\frac{1}{2k_n} + \frac{1}{k_s} \right) \quad (23)$$

と表せる。

4. 2 偶応力と曲率の関係

偶応力は、Fig.2 に示す通り、それが作用している微小要素の対応する面間に回転の勾配 (曲率) をもた

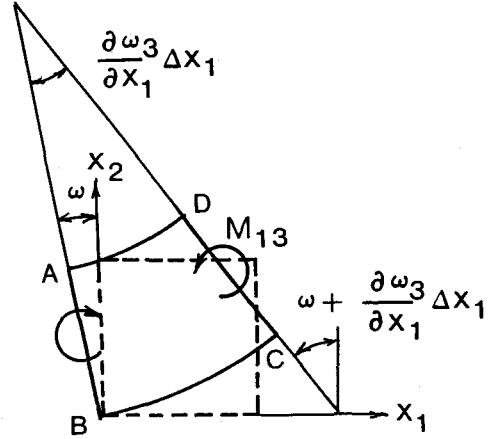


Fig.2 Curvature $\frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}$ produced by couple stress M_{13}

らす。次に、偶応力と曲率との間の関係を導いてみる。

基質をなす岩石部分は剛体であると仮定しているので、回転の勾配は不連続面に作用する偶応力による回転 $\Delta \omega_3$ にだけ注意すればよい。面 DC の面 AB に対する相対的な回転 $\frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} \Delta x_1$ は、従って、 x_1 軸と並行な長さ Δx_1 の面 BC と交わる不連続面が偶応力の影響を受けて起こる相対的な回転 $\Delta \omega_3$ を全て加え合わせたものにほかならない。

全ての不連続面の中で、単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ が $\mathbf{n}^{(\alpha)}$ を含む微小立体角 $d\Omega$ に入り、かつ不連続面の長さが $r^{(\alpha)} \sim r^{(\alpha)} + dr$ の範囲内に入るもの ($(\mathbf{n}^{(\alpha)}, r^{(\alpha)})$ - 不連続面と呼ぶ) をまず考える。長さ Δx_1 の BC と交わる $(\mathbf{n}^{(\alpha)}, r^{(\alpha)})$ - 不連続面の個数は、

$$\rho r n_1^{(\alpha)} \Delta x_1 2E(n, r) d\Omega dr \quad (24)$$

と推定される。(ただし、 $n_1^{(\alpha)}, n_2^{(\alpha)}$ はそれぞれ単位ベクトル $\mathbf{n}^{(\alpha)}$ の x_1, x_2 軸への成分である。) また、 $(\mathbf{n}^{(\alpha)}, r^{(\alpha)})$ - 不連続面の各々には、 $M_{13} n_i^{(\alpha)}$ の偶応力が作用しているので、(8) 式を考えると、相対的な回転 $\Delta \omega_3$ は、

$$\Delta \omega_3 = \frac{M_{13} n_i^{(\alpha)}}{k_\omega} \quad (25)$$

に等しい。 Δx_1 と交わる全ての $(n^{(\alpha)}, r^{(\alpha)})$ - 不連続面の総回転量は、(25) 式の回転量に(24) 式の個数をかけることによって得られるので、 $(n^{(\alpha)}, r^{(\alpha)})$ - 不連続面に伴う総回転量は、

$$\left[\frac{M_{i3} n_i^{(\alpha)}}{k_\omega} \rho n_1^{(\alpha)} r 2E(n, r) d\Omega dr \right] \Delta x_1 \quad (26)$$

と書ける。面 AB と面 CD との相対的な回転 $\frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} \Delta x_1$ は、 Δx_1 と交わる全ての不連続に伴われる回転をかき合わせれば得られるので、結局、次式を得る。

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} \Delta x_1 = \left[\int_0^{r_m} \int_0^\pi \left(\frac{M_{i3} n_i}{k_\omega} \right) \times \rho n_1 r 2E(n, r) d\Omega dr \right] \Delta x_1 \quad (27)$$

さらに(9) 式の関係と

$$N_{ij} = \int_0^{2\pi} n_i n_j E(n) d\Omega \quad (28)$$

を考慮すれば、(27) 式はさらに次式に書き改められる。

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial x_i} = \frac{2\rho}{k_n} N_{ij} M_{j3} \quad (i, j = 1, 2) \quad (29)$$

(29) 式の左辺は x_i 軸方向での線素の曲率である。従ってこの式は曲率と偶応力との関係を与えていて、求めるべき構成式である。

5 長さの材料常数 ℓ について

一般の二次元弾性論と比べると、偶応力を考慮したコッセラ弾性体では、未知数として一つのせん断応力 $T_{12}(\neq T_{21})$ と二つの偶応力 M_{13}, M_{23} が付加される。しかし、(13) 式のモーメントのつりあい式と(29) 式の二つの構成式が準備されていて、必要な方程式は全てそろっている。ここでは、不連続面の分布が等方である場合に限って、若干の考察を加えてみよう。

不連続の分布が等方の場合、 $E(n) = 1/2\pi$ となり、 $N_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij}$ と書ける。すると、例えば、

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} = \frac{\rho}{k_n} M_{13} \equiv \frac{1}{4\eta} M_{13} \quad (30)$$

ただし、 η は $\frac{k_n}{4\rho}$ に等しく、力の次元を持つ曲率弾性係数である。今、長さの次元を持つ ℓ を、せん断剛性 G と η を用いて、

$$\ell^2 = \frac{\eta}{G} \quad (31)$$

で定義する。 ℓ は、微細構造を持つ材料の構成式に特徴的に現れる材料常数である。 ℓ が構造物の代表寸法に比べ著しく小さい場合(金属はこのケースに当たる^{5)~6)}、偶応力の効果は小さく、偶応力を無視した一般の弾性理論で十分な近似を与える³⁾。(23) 式を用いて(31) 式を書き改めれば、

$$\ell = \left[\frac{F_0}{8\rho} \left(\frac{1}{2} + \frac{k_n}{k_s} \right) \right]^{1/2} \quad (32)$$

また、 $k_s = 2k_n$ の近似⁴⁾と不連続の長さが一様($r = r_0$)であると仮定できれば、

$$F_0 = \rho \int_0^{r_m} r^2 f(r) dr = \rho r_0^2 \quad (33)$$

となる。ただし、 $f(r)$ は長さ r の密度関数である。最終的に ℓ は、

$$\ell = \frac{\sqrt{2}}{4} r_0 \quad (34)$$

となり、仮に、 $r_0 = 10\text{m}$ とすれば、 $\ell = 3.5\text{m}$ となり、構造物の代表寸法程度の数値を与える。すなわち、不連続性岩盤では偶応力の効果が無視できないことを意味している³⁾。

6 参考文献

- 1) Mehrabadi, M.M., Nemat-Nasser, S. and Oda, M. (1982): On statistical description of stress and fabric in granular materials, Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomech., 6, 95-108.
- 2) Kroner, E. (1963): On the physical theory of torque stresses in continuum mechanics, Int. J. Engrg. Sci., 1, 261-278.
- 3) Mindlin, R.D. (1962): Influence of couple stresses on stress concentrations, Experimental Mech., 3, 1-7.
- 4) Oda, M. (1986): An equivalent continuum model for coupled stress and fluid flow analysis in jointed rock masses, Water Resources Research, 22(13), 1845-1856.
- 5) Ellis, R. W. and Smith C. W. (1967): A thin-plate analysis and experimental evaluation of couple-stress effects, Experimental Mech., 8, 372-380.
- 6) Schijve, J. (1966): Note on couple stresses, J. Mech. Phys. Solids, 14, 113-120.