

(5) 確率論にもとづく NATM 計測の 予測に関する一提案

東京都南多摩新都市開発本部

宅地造成事務所第 2 工区長

清水建設(株) 南大沢トンネル作業所所長

清水建設(株) 土木本部技術第一部

清水建設(株) 同上

小林正邦

岸 満

山本和義

正会員 ○河野重行

Probability-based Observational Method in NATM

Masakuni KOBAYASHI, TOKYO METROPOLITAN GOVERNMENT

Mitsuru KISHI,

SHIMIZU CORPORATION

Kazuyoshi YAMAMOTO,

SHIMIZU CORPORATION

Shigeyuki KOHNO,

SHIMIZU CORPORATION

ABSTRACT

In NATM, it is important that the displacements of the surrounding rock mass and stress change in rockbolt or shotcrete, for example are monitored during the construction and their long-term values are predicted for the successful completion of the construction. Based on the observed data, the design of the support system may be re-evaluated and modified if found to be inadequate. However, due to the large uncertainties in the actual observation, observed data may not represent the actual values and deterministic analysis may cause a large error in dealing with data. Consequently, this paper proposes the probabilistic method to predict the long-term values based upon the observation, accounting for the variation of the data. In applying proposed method to the actual case, the validity of the method has been confirmed.

1. 序論

NATMによるトンネル掘削において内空変位、ロックボルト軸力、地中内変位、吹付けコンクリート応力等の変状を計測することは非常に重要である。この計測値の空間的および時間的な傾向を把握し、将来値をできるだけ早期に予測しなければならない。その為には、得られた計測値をいかに効率よく用いてかついかに精度よく予測を行うかが問題となる。

従来、計測値から将来値を予測する一つの有用な方法として回帰分析が用いられてきた。すなわち、現実の計測値をグラフ上にプロットし、変位曲線を計算もしくは経験で求めるものである。曲線を精度よく求める為にはある程度の数のデータが必要であり、データ数が少ない時はそろりまで待たなければならない。また、追加の計測値が得られるたびに予測曲線を求め直す必要があり (Butch 式と呼ばれる)、以前のデータによる予測曲線と新計測値との関係が明確ではない。この方法は将来値を確定的に予測する、いわゆる確定的手法を用いており、例えば計測の誤差等によるデータのバラツキの予測に対する影響は考慮出来ない。また、使用する回帰モデルの誤差のために、予測値と現実の値に大きな差が生じる事がある。

本提案において、実際の計測値を用い、より効率的に精度よく予測する事を目的とするために基本的には

この回帰による方法を用いる。しかしながら、計測値のバラツキを考慮するために確率論を導入し、ベイズの理論を用いる事により計測値が得られる都度、以前得られた予測式の傾向を重視しつつ予測式を修正および改善していく逐次改善法を提案する。この手法は前述のButch 式に対しAdaptive式と呼ばれる。

2. 確率論にもとづく将来値の予測法

本手法において時間 t の経過に対する計測値 δ の推移を以下に表される指数関数で近似することを試みる。

$$\delta = \delta_c \{1 - \exp\{-a(t - t_0)\}\} + e + \delta_0 \quad (1)$$

図1に示される様に t_0 及び δ_0 は指数関数が始まる場所の時間及び変状値であり、ここでは簡単の為に確定値とする。 δ_c は指数関数の収束量を与えるパラメータであり、真の値は不明の為、確率変数とする。また、 a は指数関数の収束の速度を与えるものであり、同様に確率変数とする。 e は指数関数近似の計測データとのズレ量を与える誤差項であり、平均値 μ は0の正規分布に従う確率変数であると仮定する。 e の標準偏差 σ は地盤や支保等により異なり、現実の計測データより経験者等により決定される。

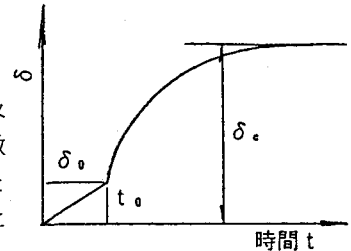


図1 指数関数近似の概念図

計測データを用いてより早く、より正確に将来予測する事は非常に重要であり、その為には予測において式(1)のパラメータである a と δ_c の値をデータにより出来るだけ早く予測する事が必要となる。前述した様に a と δ_c は確率変数として取り扱われる為に、ここでは a と δ_c の分布形を推定する事になる。

いま、 a と δ_c の同時生起確率 $P'(a = a_i, \delta_c = \delta_{c,j})$ が与えられている時、新規の観測 ε によって a と δ_c の同時生起確率はベイズの理論 (Ang と Tang)により以下の様に修正される。

$$P''(a = a_i, \delta_c = \delta_{c,j}) = \frac{P(\varepsilon | a = a_i, \delta_c = \delta_{c,j}) \cdot P'(a = a_i, \delta_c = \delta_{c,j})}{\sum_i \sum_j P(\varepsilon | a = a_i, \delta_c = \delta_{c,j}) \cdot P'(a = a_i, \delta_c = \delta_{c,j})} \quad (2)$$

$P'(a = a_i, \delta_c = \delta_{c,j})$ 及び $P''(a = a_i, \delta_c = \delta_{c,j})$ はそれぞれ修正前および後の a と δ_c の同時生起確率を示す。 a と δ_c の各々の生起確率は以下の式で与えられる。

$$P''(a = a_i) = \sum_j P''(a = a_i, \delta_c = \delta_{c,j}) \quad (3)$$

$$P''(\delta_c = \delta_{c,j}) = \sum_i P''(a = a_i, \delta_c = \delta_{c,j}) \quad (4)$$

$P(\varepsilon | a = a_i, \delta_c = \delta_{c,j})$ は $a = a_i$ および $\delta_c = \delta_{c,j}$ の時に観測 ε が得られる確率であり、尤度関数と呼ばれる。以下に、 $P(\varepsilon | a = a_i, \delta_c = \delta_{c,j})$ を算定する方法を述べる。

観測 ε に関し、次のような異なった時間に計測された h 個のデータを考える。

$$\delta = \delta_1 \text{ at } t = t_1, \quad \delta = \delta_2 \text{ at } t = t_2, \quad \dots, \quad \delta = \delta_h \text{ at } t = t_h$$

$a = a_i, \delta_c = \delta_{c,j}$ において、式(1)の中で唯一の確率変数は誤差項である e であり、したがって δ も確率変数となり、 δ の平均値 μ および標準偏差 σ は以下のように与えられる。

$$\mu_\delta = \delta_{c,j} \{1 - \exp\{-a_i(t - t_0)\}\} + \delta_0 \quad (5)$$

$$\sigma_{\delta} = \sigma_e$$

(6)

誤差項である e は正規分布に従うことにより、 δ も正規分布に従い、したがって時間 t_1 に $\delta = \delta_1$ が計測された時の尤度関数 $P(\delta_1 | a = a_1, \delta_c = \delta_{c1})$ は δ の確率密度関数 $f_{\delta}(\delta)$ を用い、以下のように表される。

$$P(\delta_1 | a = a_1, \delta_c = \delta_{c1}) = f_{\delta}(\delta_1) \cdot \Delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{\delta}} \exp\left\{-\frac{(\delta_1 - \mu_{\delta})^2}{2\sigma_{\delta}^2}\right\} \cdot \Delta \quad (7)$$

但し、 μ_{δ} および σ_{δ} は時間 $t = t_1$ における δ の平均値および標準偏差であり、式 (5)、(6) に $t = t_1$ を代入することにより得られる。時間 $t = t_2, t = t_3, \dots, t = t_h$ に対する尤度関数も同様に与えられ、各計測値の生起は互いに独立であると仮定すると、全ての計測値の尤度関数 $P(\delta | a = a_1, \delta_c = \delta_{c1})$ は以下のように表される。

$$P(\delta | a = a_1, \delta_c = \delta_{c1}) = \prod_{m=1}^h P(\delta_m | a = a_1, \delta_c = \delta_{c1}) \quad (8)$$

以上より、式 (2)、(3)、(4) を用いて、計測データにより改善された式 (1) のパラメータ a と δ_c の各々の生起確率が求められる。この修正されたパラメータ a と δ_c の各々の確率分布を用いて δ の将来値が予測される。この場合、 δ は確率変数であるため、平均値 μ_{δ} と標準偏差 σ_{δ} をもって将来値が表されるが、 a 、 δ_c および e に関する一次近似により将来の任意の時間 t における平均値 μ_{δ} と標準偏差 σ_{δ} は以下のように与えられる。

$$\mu_{\delta} = \mu_{\delta_c} \{1 - \exp\{-\mu_a(t - t_0)\}\} + \delta_0 \quad (9)$$

$$\sigma_{\delta}^2 = \{1 - \exp\{-\mu_a(t - t_0)\}\}^2 \cdot \sigma_{\delta_c}^2 + \{\mu_{\delta_c}(t - t_0) \cdot \exp\{-\mu_a(t - t_0)\}\}^2 \sigma_a^2 + \sigma_e^2 \quad (10)$$

上式において、 $t = \infty$ の時は平均値 μ_{δ} と標準偏差 σ_{δ} は以下ようになる。

$$\mu_{\delta} \approx \mu_{\delta_c} + \delta_0 \quad (11)$$

$$\sigma_{\delta}^2 \approx \sigma_{\delta_c}^2 + \sigma_e^2 \quad (12)$$

3. ケース・スタディ

本手法の妥当性を検証するために実トンネルへの適用を試みる。対象となるトンネルは東京都南多摩に現在施工中の南大沢トンネルである。南大沢トンネルはその断面が図2に示されるような近接の双設トンネルであり、掘削順序や隣接空洞の影響に対する配慮が必要である。トンネル上の土被りは最大でも2.8mしかなく、厳しい

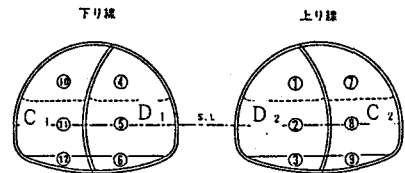


図2 南大沢トンネルの掘削順序図

	確率変数 δ_c	確率変数 a
初期値	32 36 40 44 48	10 12 14 16 18 $\times 10^{-4}$
NO. 3	32 36 40 44 48	10 12 14 16 18 $\times 10^{-4}$
NO. 5	32 36 40 44 48	10 12 14 16 18 $\times 10^{-4}$
NO. 14	32 36 40 44 48	10 12 14 16 18 $\times 10^{-4}$
NO. 23	32 36 40 44 48	10 12 14 16 18 $\times 10^{-4}$

図3 計測値によるパラメータの改善状況

施工管理が要求されている。
 内空変位や吹付けコンクリート応力等の将来値を正確に把握することは非常に重要である。ここでは、吹付けコンクリート応力を式(1)における δ とし、本手法を適用して将来値を予測する。D₁ 上半肩部における計測データを図4にプロットした点により示されるが、図2に示されるC₁ およびD₂ の掘削状況が付記されている。

いま、個々の計測値による予測の改善よりも、簡単のために5個の計測値を一つの群として各群毎のデータが得られる都度に予測を改善することにする。パラメータ a と δ_c の計測開始前の生起確率としては全く情報がないと仮定して、図3の上段に示すような一様分布を仮定した。また、誤差項 e の標準偏差 σ は同トンネルの他の計測値から 2.5 kg f/cm^2 と仮定した。指数関数の始まりとなる t_0 及び δ_0 は両者共0とした。以上の結果、パラメータ a と δ_c の各々の確率分布が23番目までの計測値の群により修正、改善されていく状況の一例が図3の2段以降に示される。図より、各計測値の群毎に a と δ_c の分布形が尖ってゆく、つまり、より正確に両パラメータが推定されていくのがわかる。各群により修正された分布形を用いて次の群に対する期間(次ステップと呼ぶ)の予測曲線の平均値を式(9)を用いて計算したものが図4に一点鎖線で示されている。また、式(10)により標準偏差が計算され、 $\mu_g \pm 2\sigma_g$ の区間も図4に示されている。これより、23番までの計測値により予測が改善され、現実の値にうまく合ってきている状況がわかる。計測値がある程度(15番目の群あたり)そろえば、予測曲線が安定してきている。

しかしながら、第24番目のデータ群が得られたところで a と δ_c の確率分布を推定する過程において発散してしまい、計算が不可能になった。これは明らかに、C₁部掘削により、もはや24番以降のデータは今までの指数関数では近似出来なくなったからである。

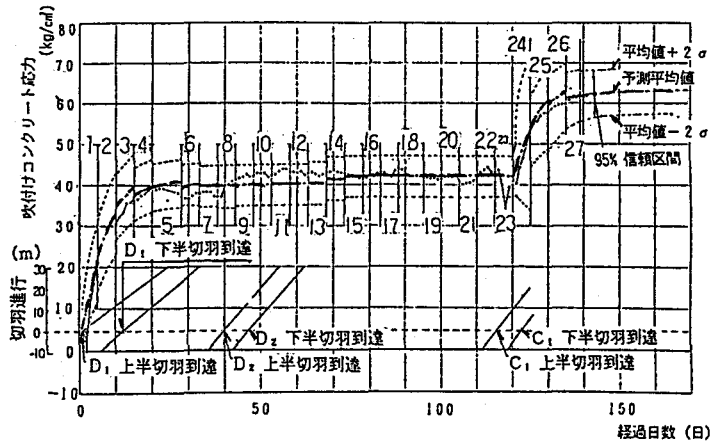


図4 計測データおよび予測結果

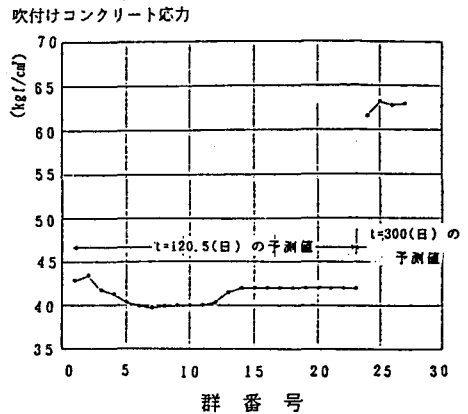


図5 予測値の平均の推移状況

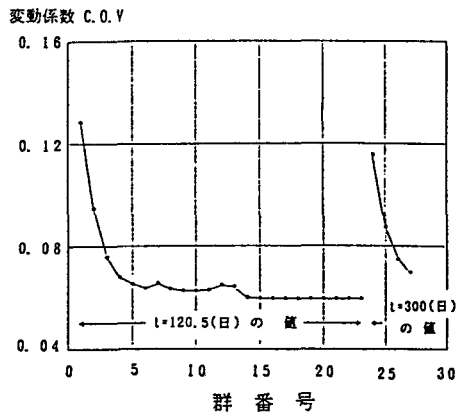


図6 予測値の変動係数の推移状況

そこで、曲線の不連続点と考えられる $t = 120.5$ 日において別の指数関数近似を行い、120.5 日以降を予測する。この場合、 $t = 120.5$ 日における最新の予測曲線による δ 、つまり 23 番目の群により改善された予測曲線にもとづく $t = 120.5$ 日における δ (確率変数) を新しい指数関数の初期値 δ_1 とする。従って、 $t = 120.5$ 日以降の指数関数は以下のように表される。

$$\delta = \delta_d \{1 - \exp\{-b(t - 120.5)\}\} + e_1 + \delta_1 \quad (13)$$

但し、 δ_d , b , e_1 は式 (1) における δ_0 , a , e に相当する。ところで、 $t = 120.5$ 日の両側の 2 つの指数関数の間には相関があると考えられる。そこで、 δ_d と δ_1 の 2 つの確率変数間の相関を考え、相関係数を ρ とすると、 ρ を用いて 120.5 日以降の任意の時間 t に対する応力 δ の平均値 μ_δ と標準偏差 σ_δ は一次近似により以下のように与えられる。

$$\mu_\delta = \mu_{\delta_d} \{1 - \exp\{-\mu_b(t - 120.5)\}\} + \mu_{e_1} + \mu_{\delta_1} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\delta^2 = & \{1 - \exp\{-\mu_b(t - 120.5)\}\}^2 \sigma_{\delta_d}^2 + \{\mu_{\delta_d}(t - 120.5) - \exp\{-\mu_b(t - 120.5)\}\}^2 \sigma_0^2 \\ & + \sigma_{e_1}^2 + \sigma_{\delta_1}^2 + 2\{1 - \exp\{-\mu_b(t - 120.5)\}\} \sigma_{\delta_d} \cdot \sigma_{\delta_1} \cdot \rho \end{aligned} \quad (15)$$

本例において、 $\rho = 0.7$ を仮定した。現在 (27 番目の群) までの予測状況を図 4 に示す。図 5 は、 $t = 120.5$ 日以前の予測曲線による $t = 120.5$ 日における応力の予測値および $t = 120.5$ 日以後の予測曲線による $t = 300$ 日における応力の予測値を平均値に関して示している。図 5 よりデータの蓄積とともに将来予測値がかなり安定してくることがわかる。また、図 6 には、予測の精度 (バラツキ) を示す変動係数 C. V. (標準偏差 / 平均値) の推移が示されている。図 5 と同様に、計測値の蓄積とともに予測が安定してくるが、7 および 12 番目あたりで多少大きくなっており、D₁ 部下半、D₂ 部切羽到達によるデータの異常を見ることができる。しかしながら、この程度の応力の変動では単一指数関数で近似可能である。

以上の結果、27 番の群により 300 日後の吹付けコンクリートの応力は 63 ± 8.8 (kg f / cm²) と予測された。27 番以降も引き続き計測された結果、現実の値は 65 (kg f / cm²) となり本手法による予測値は充分妥当なものであると考えられる。

4. 結論

本報告において、確率論によるトンネルの変状の将来予測法を提案した。その結果、計測値のバラツキを考慮し、予測精度の推移を評価した将来予測が可能になる。また、変動係数による予測精度のチェックにより計測値の異常を発見でき、単一の指数関数近似の適用性をも検討可能となる。このことにより、従来の Butch 式では予測不可能であった上半、下半掘削時や CD 工法における不連続な計測値に対しての適用も可能となる。本手法の妥当性の検証として南大沢トンネルにおける吹付けコンクリートの応力の将来予測を行ったが、予測値は後に得られた現実の値と比べて充分妥当なものであった。

参考文献

1. KOHNO, S. "Reliability-Based Design of Tunnel Support Systems", Ph. D. Thesis, Dept of Civil Engineering, Univ. of Illinois, Urbana, IL, 1989.
2. ANG, A. H-S. and W. H. TANG, "Probability Concept in Engineering, Planning and Design, Vol. I: Basic Principles, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1975.