

(42) 構造を持つ不連続性岩盤の弾・塑性解析

○埼玉大学大学院 学生会員 中山秀雄
埼玉大学工学部 正会員 小田匡寛

1. はじめに

金属の分野を中心に発展してきた弾塑性理論は、地盤材料の分野にも適用されて以来、この分野においても目ざましい発展を見せてきた。最近では地盤材料の分野において多種多様な弾塑性構成モデルが提案されていて、一応の成功を収めたと言っても良いであろう。しかし、従来の数理塑性理論には、地盤材料の構造特性に対する配慮に欠けていて、地盤材料、特に不連続性岩盤へそのままの形式で適用するのは若干のためらいを感じる。周知の通り、岩盤の水理・力学的挙動は、その不連続面の幾何学的特性に強く依存している。従って、不連続性岩盤の塑性論を論じるためには、不連続面の幾何学への配慮が不可欠であると考えられる。

この小論は、岩盤の不連続面の幾何学的特性を表すクラックテンソルを用いて、Drucker-Prager型の降伏関数を拡張し、不連続性岩盤の構造特性を塑性理論の枠内で考慮しようとする試みを示している。

2. クラックテンソル

岩盤の不連続面の幾何学的配列を示すクラックテンソルは次のように定義されている¹⁾。

$$F_{ij\dots k} = (\pi \rho / 4) \int_0^{t_m} \int_0^{r_m} \int_{\Omega} r^a t^b n_i n_j \dots n_k E(\underline{n}, r, t) d\Omega dr dt \quad (1)$$

ただし、 a, b は0または任意の正の整数、 Ω は全立体角で 4π に等しく、 ρ は単位体積当りのクラック数、 n_i は単位法線ベクトル $\underline{n}$ の x_i 軸に対する成分、 $E(\underline{n}, r, t)$ はクラックの方向 $\underline{n}$ 、大きさ r 、厚さ t の分布を記述する密度関数、 t_m, r_m は最大の厚さ、寸法をそれぞれ意味するものとする。(式中の $\pi/4$ は、クラックの形状を円板とする仮定によっている。)

ここでは、不連続性岩盤の弾性を論じる際に重要な役割を担う(1)式で $a=3, b=0$ とする二階の無次元テンソル F_{ij} を岩盤の構造特性の指標として利用する。すなわち、

$$F_{ij} = (\pi \rho / 4) \int_0^{t_m} \int_0^{r_m} \int_{\Omega} r^3 n_i n_j E(n, r, t) d\Omega dr dt \quad (2)$$

3. 降伏条件

等方性材料の降伏条件 f は三つの応力不変量を用いて、次の一般式で与えられる。

$$f(\sigma_{ij}) = f(I_1, J_2, J_3) = 0 \quad (3)$$

ただし、 σ_{ij} を応力テンソル、 S_{ij} を $(\sigma_{ij} - 1/3 \sigma_{kk} \delta_{ij})$ で定義される偏差応力テンソルとすれば、 I_1, J_2, J_3 はそれぞれ、

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{ii} \\ J_2 &= 1/2 S_{ij} S_{ji} \\ J_3 &= 1/3 S_{ij} S_{jk} S_{ki} \end{aligned} \quad (4)$$

を意味している。降伏条件が応力テンソルのみならず、クラックテンソル F_{ij} にも依存すると考えれば、

(3)式は次のように拡張される²⁾。

$$f(\sigma_{ij}, F_{ij}) = f(I_1, J_2, J_3, \bar{I}_1, \bar{J}_2, \bar{J}_3, \dots) = 0 \quad (5)$$

ただし、付加された $\bar{I}_1, \bar{J}_2, \bar{J}_3$ は、 F_{ij} のみに依存するテンソル $C_{ij}, C_{ijkl}, C_{ijklmn}$ を用いて、

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= C_{ij} \sigma_{ij} \\ \bar{J}_2 &= C_{ijkl} S_{ij} S_{kl} \\ \bar{J}_3 &= C_{ijklmn} S_{ij} S_{kl} S_{mn} \end{aligned} \quad (6)$$

で定義される混合不変量である。(5)式の降伏条件は、座標変換によってその形式が変化してはならないという基本的な条件を満足している。 $C_{ij}, C_{ijkl}, C_{ijklmn}$ が二階のテンソル F_{ij} のみによっていると仮定しているので、例えば、 C_{ij}, C_{ijkl} の一般形は次式で与えられる³⁾。

$$C_{ij} = a_1 \delta_{ij} + a_2 F_{ij} + a_3 F_{ik} F_{kj} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= b_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + b_2 (F_{ij} \delta_{kl} + F_{kl} \delta_{ij}) \\ &\quad + b_3 (\delta_{ij} F_{km} F_{ml} + \delta_{kl} F_{im} F_{mj}) \\ &\quad + b_4 (F_{ij} F_{km} F_{ml} + F_{im} F_{mj} F_{kl}) \\ &\quad + b_5 F_{im} F_{mj} F_{kn} F_{nl} \\ &\quad + b_6 (\delta_{ki} \delta_{lj} + \delta_{li} \delta_{kj}) \\ &\quad + b_7 (F_{ik} \delta_{lj} + F_{kj} \delta_{li} + F_{il} \delta_{kj} + F_{lj} \delta_{ki}) \\ &\quad + b_8 F_{ij} F_{kl} + b_9 (F_{im} F_{mk} \delta_{lj} + F_{km} F_{mj} \delta_{li} \\ &\quad + F_{im} F_{ml} \delta_{kj} + F_{im} F_{mj} \delta_{ik}) \end{aligned} \quad (8)$$

(5)式の一般式の詳細を論ずる事はそれほど重要ではない。むしろ、(5)式の一般式と矛盾せず、かつ岩盤の降伏を記述する上で便利で具体的な形式を捜し出すことがむしろ重要である。ここでは、等方材料に対するDrucker-Pragerの降伏条件を拡張した次の形式を採用する。

$$f = \bar{J}_2^{1/2} - \alpha \bar{I}_1 - K = 0 \quad (9)$$

ここに、 α, K は実験から決定される。(8)式の C_{ijkl} に含まれる F_{ij} の二次以上の項を省略し、かつ $S_{ij} \delta_{ij} = 0$ に注目すれば、 $\bar{I}_1, \bar{J}_2$ は次のように与えられる。

$$\bar{I}_1 = (a_1 \delta_{ij} + a_2 F_{ij}) \sigma_{ij} \quad (10)$$

$$\bar{J}_2 = (2b_6 \delta_{ki} \delta_{lj} + 4b_7 F_{ik} \delta_{lj}) S_{ij} S_{kl} \quad (11)$$

構造異方性を持たない等方性材料の場合、 F_{ij} は $1/3 F_{kk} \delta_{ij}$ で与えられ、(9)式は次式へと簡略化される。(ただし、今後 $F_{kk} = F_0$ と略記する。)

$$f = [(2b_6 + 4b_7 F_0/3) S_{ij} S_{ij}]^{1/2} - \alpha (a_1 + a_2 F_0/3) \sigma_{ii} - K \quad (12)$$

(12)式の等方性材料の降伏条件は、Drucker-Pragerの条件に一致しなければならないので、係数 a_1, a_2, b_6, b_7 に次の制約条件が課せられる。

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 F_0/3 &= 1 \\ 2b_6 + 4b_7 F_0/3 &= 1/2 \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、(13)式において、 a_1 , a_2 , b_6 , b_7 をそれぞれ1, 0, 1/4, 0とすると、Drucker-Pragerの条件になることに注意。 a_1 , a_2 , b_6 , b_7 は実験から決定される定数である。

数値計算に使いやすく(11)式の $\bar{J}_2$ をベクトル標示で示しておく。すなわち、 $\underline{S}^T = \{S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{23}, S_{31}\}$ と置くと J_2 は、

$$\bar{J}_2 = \underline{S}^T \underline{A} \underline{S} \quad (14)$$

となり、6行6列の対称行列であり、

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2b_6+4b_7F_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2b_6+4b_7F_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2b_6+4b_7F_3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2b_6+b_7(F_1+F_2) & 0 & 0 \\ \text{(Symmetrical)} & & & & 4b_6+b_7(F_2+F_3) & 0 \\ & & & & & 4b_6+b_7(F_3+F_1) \end{bmatrix} \quad (15)$$

となる⁴⁾。(ただし、(15)式の成分は基準軸として F_{ij} の主軸を取って表されていることに注意。)

4. 塑性ポテンシャル関数

この小論では異方性不連続岩盤の弾・完全塑性挙動を取り扱う。降伏関数と同様な形で塑性ポテンシャル g を次のように定義する。

$$g = \bar{J}_2^{1/2} - \bar{\alpha} \bar{I}_1 - \bar{K} = 0 \quad (16)$$

ここに、 $\bar{\alpha}$, $\bar{K}$ は実験から決定される。もしも $\alpha = \bar{\alpha}$ ならば $f = g$ となり、これは、すなわち関連流れ則である。

5. 例

ここで、砂の場合を例に取って F_{ij} による異方性の効果を見てみよう。なお、不連続性岩盤の場合にも同様の取扱いが可能であるが、それについては次の機会に述べたいと思う。

砂の場合、 F_{ij} は、粒子の長軸方向 $\underline{m}$ を用いて次式で定義される⁵⁾。

$$F_{ij} = \int_{\Omega} m_i m_j E(\underline{m}) d\Omega \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (17)$$

ただし、 $F_0=1$ となる点が(1)式と異なっている。また、図-1において X_1 を鉛直軸とすると、重力の影響下で堆積した砂の場合、一般に $F_{22}=F_{33}$ であり、また F_{11} , F_{22} , F_{33} の値は主値と考えてよい。

ここで、豊浦標準砂の平面ひずみ試験の結果を解析してみよう。標準砂の F_{ij} は次の通りである。

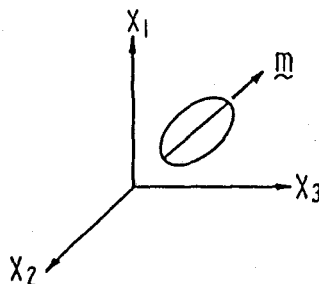


図-1 砂粒子長軸の配向性

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0.227 & 0 & 0 \\ 0 & 0.387 & 0 \\ 0 & 0 & 0.387 \end{pmatrix} \quad (18)$$

等方状態の平面ひずみ試験結果から $\alpha=0.218$, $\bar{\alpha}=0.0809$, $K=\bar{K}=0$ を決定し、また F_{ij} として (18) 式の値を採用したとき、堆積面と最大主応力方向とのなす角度 δ に対する内部摩擦角 ϕ の変化を図-2 に実線で示す。この場合、 a_1, a_2, b_6, b_7 をそれぞれ 1.91, -2.72, -0.0328, 0.424 としている。なお、縦軸は $\delta=90^\circ$ の時の ϕ (ϕ_{90}) を基準として無次元化している。また、プロット・マークは龍岡ら(1986)による実測値である。

さらに、 a_1, a_2, b_6, b_7 の様々な値に対する、堆積面と最大主応力方向とのなす角度 δ と内部摩擦角 ϕ との関係を図-3 に示す。

このように、 a_1, a_2, b_6, b_7 の値を変えることによって様々な形状の曲線が描ける。特に、 $a_1=1.91, a_2=-2.72, b_6=-0.316, b_7=0.849$ の曲線は一般に岩盤に見られる強度異方性の形状と類似している。

6. おわりに

以上のように、クラックテンソル F_{ij} を用いることによって不連続性岩盤の特性をDrucker-Prager型の降伏条件に取り入れることが可能になった。しかし、これは構造を持つ材料の塑性論へのアプローチの第一歩に過ぎない。今後、得られた結果の実験的検証、さらに塑性変形に伴う構造変化を考慮できるような、より現実的な塑性論の確立へ向けて議論を展開するつもりである。

《 参考文献 》

- 1) 小田匡寛：不連続性岩盤の力学へのアプローチ、土と基礎、Vol.35(3), pp.29~34, 1987.
- 2) カチャノフ：破壊力学の基礎（大橋義夫訳、森北出版株式会社）、1974.
- 3) 例えば、Couwin, S.C.: The relationship between the elasticity tensor and the fabric tensor, Vol.4, 1-11, 1985.
- 4) Ghaboussi, J.: Plasticity model for inherently anisotropic behaviour of sands, Int. J. for Numerical Meth. in Geomechanics, Vol.8, 1-17, 1984.
- 5) M.Oda and H.Nakayama: A yield function for soils with anisotropic fabric, (To appear in ASCE., 1987).

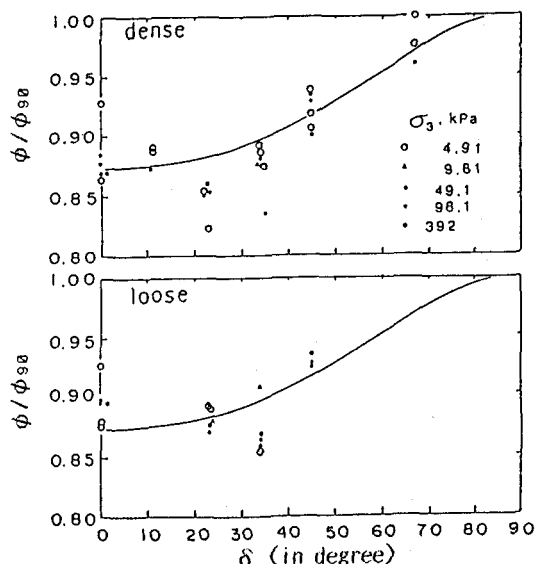


図-2 δ (堆積面と最大主応力方向とのなす角度) に対する ϕ (内部摩擦角) の変化

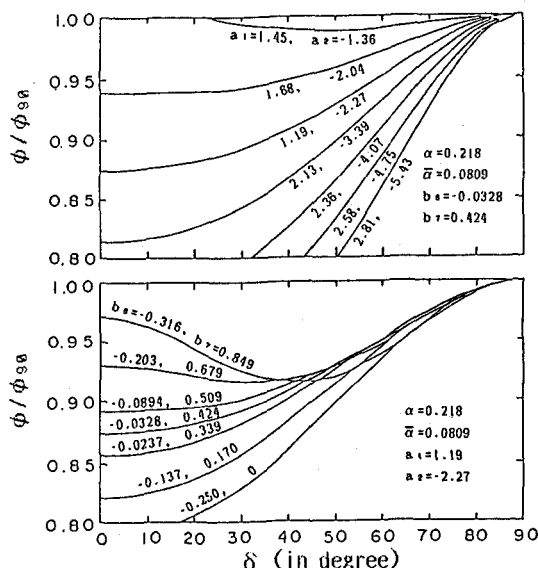


図-3 a_1, a_2, b_6, b_7 の変化に対する、 δ (堆積面と最大主応力方向とのなす角度) と ϕ (内部摩擦角) との関係

(42) Elastic and Plastic Analysis for Discontinuous Rock Masses with Anisotropic Fabric

H.Nakayama, Saitama Univ.

M.Oda, Saitama Univ.

Abstract

Crack tensor F_{ij} for discontinuous rock masses is introduced as an index showing the anisotropy due to discontinuous planes. Using the crack tensor, Drucker- Prager type of yield function is extended so as to take into account the anisotropic yielding behaviour of discontinuous rock masses. Plane strain tests on Toyoura sand are analyzed with a result that anisotropic shear strength is fairly fitted by the extended Drucker- Prager's yield function. This preliminary study also has shown that this yield function can be apply to discontinuous rock masses. Based on this, it is concluded that this study provides a first step to link the material science approach of rocks, in which the spatial arrangement of discontinuous planes plays an important role, to the continuum theory of plasticity.