(38) 確率有限要素法における破壊確率計算法の開発

東電設計(株)火力土木部　正　○溜　幸生
神戸大学工学部　　　　　正　　桜井春輔

1．はしがき

最近、地盤工学に係わる構造物の設計において、数値解析は欠かすことのできない重要な手法となりつつある。その中でも有限要素法が多く用いられているが、最近は、地盤の材料定数や外力の不確定性をも考慮して解析することのできる確率有限要素法が注目されている。しかし、この方法を用いて地盤構造物を解析する場合インプットデータとして不確定要因（材料定数や外力など）を確率変数としたときの平均値・分散・分布形を与えてやらなければならない。このうち分布形については正規分布を仮定する場合が多いが、地盤構造物に係わる不確定要因は必ずしも正規分布に従うものばかりではない.[1] ところがこれまでの確率有限要素法では、一般に、正規分布を仮定しているので、正規分布形以外の分布形を取り扱う場合には、必ずしも精度のよい解を与えない。本報告では、その問題を解決するために新たな方法を提案し、それを検証するために数値計算を行なう。

2．破壊確率の計算法

ここで提案する確率有限要素法は、破壊の状態を定義する破壊規準関数を破壊点において線形化し、破壊確率を求めるときの積分は乱数を用いて行なうものである。ここでは破壊形態として各要素の局部破壊を考える。要素 i の破壊規準関数を Qsi とすると、Qsi<0のとき応力状態が破壊規準を越えるため、その要素は破壊する。また、Qsiは不確定要因 $r_k, k=1,2,\cdots,m$（r_k はE，ν，γ，c，ϕ など）の関数である。また、不確定要因は互いに独立であると仮定する。Qsiを破壊点 r_{ki}^* において線形化すると

$$Qsi \simeq \sum_{k=1}^{m}(r_k - r_{ki}^*)\left.\frac{\partial Qsi}{\partial r_k}\right|_* \tag{1}$$

ここで、破壊点 r_{ki}^* は収束計算によって求めることができる。また $|_*$ は、偏導関数の破壊点における値をあらわす。不確定要因は互いに独立であることが仮定されているので、それらの結合確率密度関数は各不確定要因の確率密度関数から

$$f_{r_1,r_2,\ldots,r_m}(r_1, r_2,\cdots, r_m) = f_{r_1}(r_1)\cdot f_{r_2}(r_2)\cdot\cdots\cdot f_{r_m}(r_m) \tag{2}$$

であらわされる。これらを用いて要素 i の破壊確率は次の積分であらわされる。

$$P_{f,i} = \int\!\!\int_{D_i}\!\cdots\!\int f_{r_1,r_2,\ldots,r_m}(r_1, r_2,\cdots, r_m)dr_1dr_2\cdots dr_m \tag{3}$$

$$D_i = \left\{(r_1, r_2,\cdots, r_m)\ \middle|\ \sum_{k=1}^{m}(r_k - r_{ki}^*)\left.\frac{\partial Qsi}{\partial r_k}\right|_* < 0\right\} \tag{4}$$

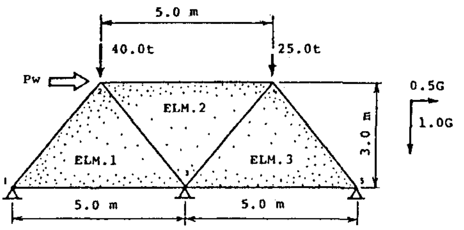
式(3)の重積分は、積分領域が式(4)で示すような超平面で区切られており、結合確率密度関数は式(2)のように個々の確率密度関数の積であらわされるので、乱数を用いて比較的容易に計算することができる。つまりそれぞれの確率密度関数から発生された乱数の組を $(r_1, r_2,\cdots, r_m)$ とし、これらをN回発生させたとき式(4)を満たす乱数の組の個数を N_{Fi} とすると、要素 i の破壊確率は

$$P_{f,i} = \frac{N_{Fi}}{N} \tag{5}$$

で計算される。

3．数値計算例

ここで提案する確率有限要素法の精度を検証するため図－１に示す３要素４自由度のモデル[2)]について本手法とモンテカルロ法の両手法により解析を行ない結果を比較する。検証は、モンテカルロ法の試行回数を変化させる場合と、確率密度関数の変動係数を変化させる場合の２通りを行なう。



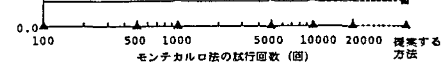
図－１　解析モデル

表－１　インプットデータ

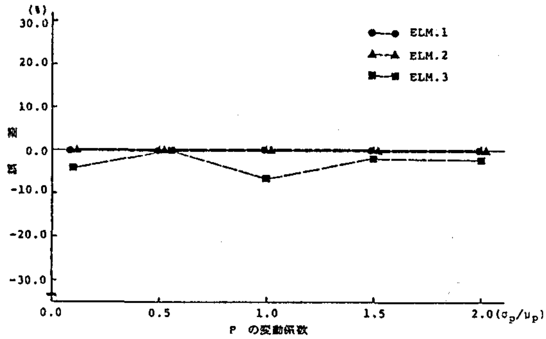
		平均値	変動係数	分布形
ヤング係数	E	10000.0 tf/m²	0.0	――
ポアソン比	ν	0.48	0.0	――
単位体積重量	γ	1.8 tf/m³	0.0	――
粘着力	c	35.0 tf/m²	0.286	正規分布
内部摩擦角	φ	30.0°	0.0	――
外力	Pw	80.0 tf	0.4	対数正規分布

インプットデータは表－１のように設定した。不確定要因としては粘着力ｃおよび外力Ｐを選んだ。それらの確率密度関数の分布形はそれぞれ正規分布、対数正規分布とした。尚、これらのインプットデータは数値計算を行なうために仮定したものである。破壊点を求めるときの収束誤差の判定は0.01とし、ここで提案する方法の乱数発生回数はＮ＝20000とする。

モンテカルロ法の試行回数を100、500、1000、5000、10000、20000 と変化させたときの各要素の破壊確率と本手法で求めた破壊確率とを比較した結果を図－２に示す。これより、モンテカルロ法の試行回数が増すにつれて本手法で求めた破壊確率に近づくことがわかる。次に、外力Ｐ（対数正規分布）の変動係数を0.1,0.5,1.0,1.5,2.0と変化させたとき、試行回数20000回のモンテカルロ法の結果を正解値として本手法の結果との相対誤差であらわしたものを図－３に示す。この図より、Ｐの変動係数が大きくなっても相対誤差は大きくならないことがわかる。



図－２　モンテカルロ法との比較



図－３　Ｐの変動係数による各要素の誤差

4．むすび

１．ここで提案する確率有限要素法によると、不確定要因の確率密度関数の分布形が正規分布以外の複雑な分布形に従う場合でもモンテカルロ法で求めた破壊確率とよく一致する。

２．本手法による解は確率密度関数の変動係数が大きくなる場合であっても、モンテカルロ法を正解値としたときの相対誤差が７％以内に収まる。これは本手法がこのような場合でも有効であることを示す。

参考文献

1)辰巳安良・鈴木善雄：確率有限要素法による護岸の信頼性設計の試み，土木学会論文集，No. 303，1986.

2)鈴木誠・石井清：確率有限要素法による斜面安定解析，土木学会論文集，No. 364，1986.

3)溜幸生：岩盤構造物の信頼性解析に関する研究，神戸大学大学院修士論文，1987. 3，pp35-57.

(38) A new method for calculating failure probability in stochastic finite element method

by
Yukio TAMARI
(Tokyo Electric Power Services Co., Ltd.)
Shunsuke SAKURAI
(Dept. of Civil Engineering, Kobe University)

ABSTRACT

In the design of rock and soil structures, numerical analyses such as a finite element method (FEM) has been recognized as an effective tool for evaluating the stability of the structures. Recently a stochastic finite element method (SFEM) which can treat with stochastic variability draws much attention particularly in geotechnical engineering field. This is due to the fact that the design parameters such as material constants, external loads etc. must be regarded as random variables in geotechnical engineering problems. Thus the stochastic parameters of mean value, variance and probability density function are taken into account.

In an ordinary SFEM, the probability density functions are usually assumed to be a normal distribution. The distribution of uncertainty, however, does not always follow to the normal distributions in geotechnical engineering problems. Therefore, difficulties may arise when applying SFEM to non-normal distribution problems.

In this paper a new method is proposed in order to overcome these difficulties for calculating failure probability. Some numerical simulations are also demonstrated to verify the proposed method.