

(37) 多数の亀裂を含む材料の巨視的弾性 コンプライアンスに関する考察

埼玉大学 ○原夏生 中島達也 小田匡寛 山辺正
大成建設(株) 亀村勝美

1. はじめに

亀裂を含む材料の力学的挙動を考える上で内在する亀裂をどう評価し、いかに全体の挙動に取り込むかということは重要な問題である。本論文は、亀裂を含んだ岩石供試体、及び石膏供試体による一軸圧縮試験を行うとともに、亀裂を含む材料の解析法として一般的なグッドマンのジョイント要素を用いた有限要素解析を行っている。得られた結果は、クラックテンソルを用いて表された巨視的弾性コンプライアンスと比較検討され、クラックテンソルによる解析手法の適用性、実用性が検討された。

2. クラックテンソルによる巨視的弾性 コンプライアンス

クラックテンソルによる巨視的弾性コンプライアンスは式(1)～(8)によって表される¹⁾。式(1)は巨視的なひずみが基質部分に生ずるひずみとクラック部分に生ずるひずみとの線形和である、として導かれた。式(2)で定義される M_{ijkl} は基質部の弾性コンプライアンスであり E, ν はそれぞれ基質部の弾性定数、ポアソン比である。また C_{ijkl} はクラックの存在による付加項であり式(3)で与えられる。式(3)中の F_{ij} 及び F_{ijkl} はそれぞれ二階、四階のクラックテンソル(式(4))であって、クラックの幾何学的特性のみに依存している。 (F_{ij}) のトレース F_{ii} を特に F_0 と記すことにする) 式(5)の N_{ij} はクラックの方向(n_i : 成分 n_i を持つクラックの法線方向と一致する単位ベクトル)のみに依存するテンソルである。 N_{ij} を用いて表される h, g はクラックの垂直剛性、せん断剛性であり、それぞれ式(6), (7)の形式で応力に依存している。ただし式中の C は式(8)で定義されるクラックの aspect ratio である。式(1)の弾性構成式は、クラックの存在による弾性コンプライアンスが応力に依存するために非線形となるが²⁾、 $h=g=D(\text{const})$ と仮定すると、応力～ひずみ関係は線形となり単純化される。この場合の巨視的弾性コンプライアンスはマトリクス形で式(9)に示される。(式(9)は二次元の場合)この形式の応力～ひずみ関係は弾性基質中に penny shape(三次元),あるいは楕円(二次元)のクラックが存在するとして解いた弾性解(クラック相互の干渉は無視)と完全に一致していて、その h と g は式(10)で与えられる。今、式(9)で一軸状態を考えると($\bar{\sigma}_{11} \neq 0, \bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{12} = 0$)クラックを含む巨視的弾性定数、及びポアソン比はそれぞれ式(11a), (11b)で与えられる。

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \bar{\epsilon}_{ij}^{(m)} + \bar{\epsilon}_{ij}^{(c)} = M_{ijkl} \bar{\sigma}_{kl} + C_{ijkl} \bar{\sigma}_{kl} \quad (1)$$

$$M_{ijkl} = \frac{(1+\nu)}{E} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (2)$$

$$C_{ijkl} = \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{g} \right) F_{ijkl} + \frac{1}{4g} (\delta_{ik} F_{jl}^{(3)} + \delta_{il} F_{jk}^{(3)} + \delta_{jk} F_{il}^{(3)} + \delta_{jl} F_{ik}^{(3)}) \quad (3)$$

$$F = \frac{\pi \rho}{4} \int_0^\infty \int_\Omega r^3 \Omega \otimes \Omega \otimes \dots \otimes \Omega E(\Omega, r) d\Omega dr \quad (4)$$

$$N_{ij} = \int_\Omega n_i n_j E(\Omega) d\Omega \quad (5)$$

$$h = \frac{1}{T} (h_0 + C \bar{\sigma}_{ij} N_{ij}) \quad (6)$$

$$g = \frac{1}{T} (g_0 + g \bar{\sigma}_{ij} N_{ij}) \quad (7)$$

$$C = \frac{r}{t_0} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_{11} \\ \bar{\epsilon}_{22} \\ \bar{\epsilon}_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} F_{11} + \frac{D}{E} - \frac{D}{E} \nu & \frac{1}{2} F_{12} \\ F_{22} + \frac{D}{E} & \frac{1}{2} F_{12} \\ \text{Symm} & \frac{1}{4} (F_{11} + F_{22}) + \frac{1+\nu}{2E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$h = g = \begin{cases} \frac{3\pi E/8}{2E/\pi} \text{ penny shape クラック (三次元)} \\ \text{楕円クラック (二次元)} \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{11}}{\bar{\epsilon}_{11}} = \bar{E} = \frac{E}{\frac{E}{D} F_{11} + 1} = \frac{E}{\frac{\pi}{2} F_{11} + 1} \quad (11a)$$

$$\frac{\bar{\epsilon}_{22}}{\bar{\epsilon}_{11}} = \bar{\nu} = \frac{E}{\frac{E}{D} F_{11} + 1} = \frac{E}{\frac{\pi}{2} F_{11} + 1} \quad (11b)$$

$\bar{\sigma}_{ij}$: 巨視的応力テンソル δ_{ij} : クロネッカのデルタ
 n_i : クラックの面に立てた単位法線ベクトル
 r : クラックの直径 Ω : 立体角
 $E(\Omega, r)$: 密度関数 $\otimes$: テンソル積
 ρ : クラック密度 t_0 : クラックの開口幅

3. 岩石供試体及び石膏供試体による一軸圧縮試験

上記理論の適合性を調べるために亀裂を含む岩石供試体及び石膏供試体による一軸圧縮試験を行った。

3.1 岩石供試体³⁾

長野県大西山崩壊現場より採取したブロック状のミロナイトをダイヤモンドカッターを用いて直方体の供試体に整形し、一軸圧縮試験を行うと共に、供試体表面に現れるクラックのトレースを用いて三次元のクラックテンソルを決定した。供試体は合計8個で、二階のクラックテンソルの第一不変量 F_0 が 0.18~16.4 の範囲にあり、広範なクラックの幾何学性を代表している。

一軸圧縮試験における供試体の挙動は図-1に示すように圧縮初期の段階で著しい非線形な曲線を描き、圧縮初期にクラックが閉塞していく様子を表している。図中に示す E_{10}' と E_{50}' はそれぞれ破壊応力の 10% 及び 50% の応力レベルにおける割線弾性係数である。 E_{10}' 、 E_{50}' を基質部の弾性定数 E で無次元化し、各供試体のクラックテンソルの成分 F_{11} に対してプロットしたものが図-2, (a), (b) である。図中に示す曲線は式(11a)の E/D をそれぞれ 1.5 (E_{50}' レベル), 0.5 (E_{10}' レベル)としたものであり、 F_{11} の大きさにかかわらず実験結果をよく説明していることが分かる。

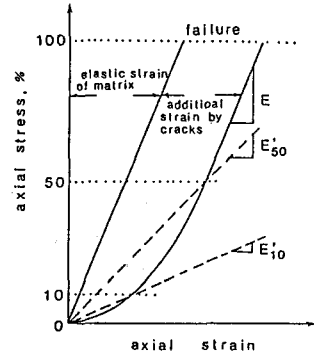


図-1 ミロナイト供試体の応力～ひずみ曲線(概念図)

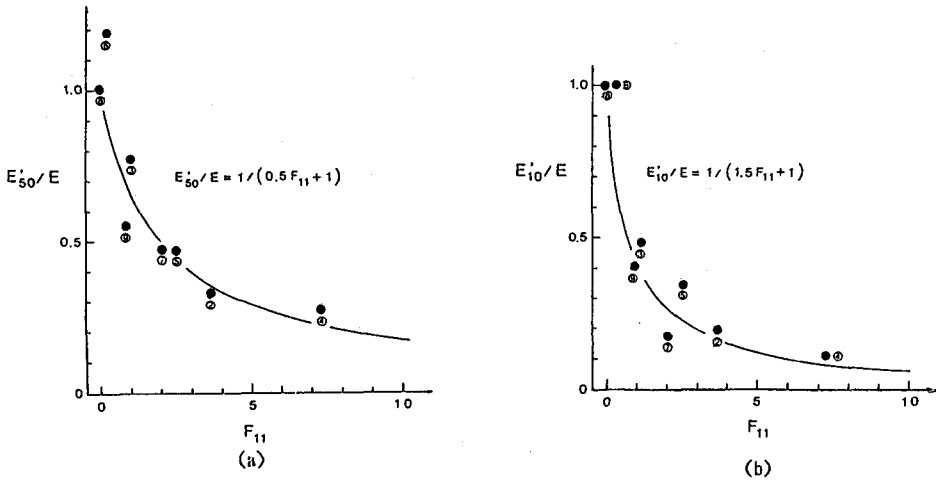


図-2 ミロナイト供試体の巨視的弾性定数

3.2 石膏供試体⁴⁾

スノーマットでクラックを模擬的に表した石膏供試体(図-3)により一軸圧縮試験を行った。結果を図-4に示す。縦軸は各供試体の巨視的弾性定数を基質部の弾性定数 E で無次元化したものであり、横軸は F_{11} である。スノーマットの剛性が基質部(石膏)の剛性に比べ無視しうる程小さいのでスノーマットによるクラックは開口クラックであると考えられる。図-4 中の実線は式(11a)で $h=g/E/2\pi$ とした場合の理論式を示して、実験値(●)の上界に位置していることが分かる。

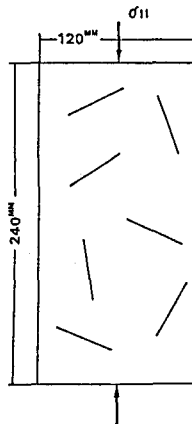


図-3 石膏供試体

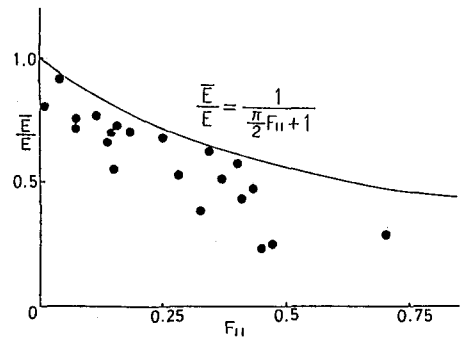


図-4 石膏供試体の巨視的弾性定数

4. 数値実験

4.1 数値実験

上記実験結果を踏まえ、クラックにジョイント要素を用いた有限要素解析⁵⁾(以後 ジョイント要素と呼ぶ)を実施した。解析領域は、図-3に示す石膏供試体に対応する 120mm×240mm の長方形領域内と、図-5に示す正方形領域との二種類である。その領域に二階のクラックテンソルの意味で等方となるようにクラックパターンを発生させ F_0 が、0.2~22.0 の範囲を持つ供試体に対して、一軸圧縮試験を数値実験的に行った。(二次元等方クラックパターンにおいては $F_{11}=1/2F_0$ となるので F_{11} は 0.1~11.0 の範囲となる)クラックパターンの作製は以下の二通りの方法を用いた。

(1) ランダム・パターン：乱数を用いて解析領域内に等方性を保つようにクラックをランダムに発生させる。(図-5a)

(2) メッシュ・パターン：メッシュ分割を容易にするために、前もって指定された分割線に一致するようにクラックを配置する。(図-5b) ($F_0=22.0$ ($F_{11}=11.0$) のサンプルは領域内に存在するすべての要素の境界をジョイント要素をで置き換えたものに相当する)

また、ジョイント要素の剛性は次式で与られた。すなわち、二次元弾性体中にある楕円クラック(図-6)に垂直な方向に相対変位量 δ を起こすとする。その平均値 $\bar{\delta}$ は、垂直応力 $\bar{\sigma}_n$ と次の関係が成立する。

$$\bar{\delta} = \frac{\pi}{2E} \cdot r \cdot \bar{\sigma}_n \quad (12)$$

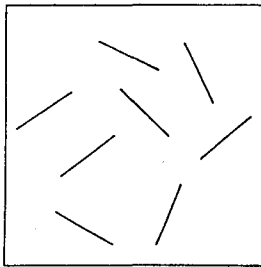
ただし、

$$\bar{\delta} = \frac{1}{S} \int_S \delta \, ds \quad (13)$$

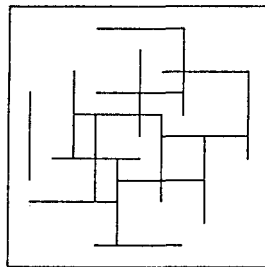
そこで剛性率 g は、

$$g = \frac{\bar{\sigma}_n}{\bar{\delta}} = \frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{r} \quad (14)$$

で定義する。

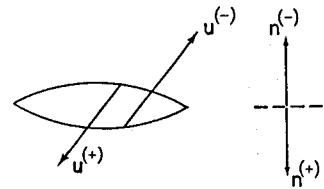


(a) ランダム・パターン



(b) メッシュ・パターン

図-5 クラックパターン



$$\delta = u^{(+)} - u^{(-)}$$

図-6 楕円クラック

4.2 結果及び考察

図-7に数値計算の結果を示す。図-2,図-4と同様、基質の弾性率で無次元化された E が対応する供試体の F_{11} に対してプロットされている。図中の○印はランダム・パターン、一方●印はメッシュ・パターンによる解析結果である。また、図中の実線は、式(11a)による巨視的弾性定数を示している。また図-8には巨視的なポアソン比 $\bar{\nu}$ が基質部のポアソン比 ν で無次元に示されている。解析結果によると、一般的にメッシュ・パターンの巨視的な弾性定数がランダム・パターンのサンプルのそれを上回る傾向にある。この原因として次の二点が考えられる。 1) クラック分布のランダム性が巨視的な弾性定数を下げる。 2) メッシュ・パターンのクラック配置では比較的細かなメッシュ分割が可能であったのに対し、ランダム・パターンのものではメッシュ分割が大まかなものになってしまった。

しかしながら、クラックパターンの違いによる若干の差にもかかわらず、以下の結論を得ることができ

- (1) 数値実験の結果は、式(11)の理論の予測と傾向的に一致する。
 - (2) クラックパターンの多様性にもかかわらず、巨視的弾性定数はおおむね F_{II} の値によって決っていて、この結果はクラックテンソルで評価することの有効性を示している。
 - (3) クラックテンソルによる巨視的弾性定数はジョイント要素による解析値のほぼ上限に位置しており、かつ全体的な傾向をよくとらえている。
 - (4) 今回の数値実験から F_{II} と $\bar{\nu}/\nu$ の間には明確な関係は得られなかった。
- なお、ジョイント要素を用いた数値実験による巨視的弾性定数はクラックテンソルによる若干小さい値を取っている。この理由として以下のことが考えられる。
- ジョイント要素でモデル化する場合、その剛性 g は式(14)で与えられた。しかし、そのような剛性の与え方は唯一ではなく、次のように考えることもできる。すなわち、開口クラックの各部分の剛性 $\bar{\sigma}_n/\delta$ の平均値を取り $\langle g \rangle$ を次式で定義する。

$$\langle g \rangle = \frac{1}{s} \int_s \frac{\bar{\sigma}_n}{\delta} ds = \frac{\bar{\sigma}_n}{s} \int_s \frac{1}{\delta} ds \quad (15)$$

式(14)と式(15)において $\delta > 0$ であれば $\langle g \rangle \geq g$ の関係が成り立つ。したがってジョイント要素の剛性として式(15)を用いれば、式(11)の理論式と数値実験との結果はおおむね一致するものと思われる。また、その他の理由としてクラックテンソルによる巨視的弾性コンプライアンスには、クラック相互の弾性干渉に対する考慮がなされていないことが指摘できる。

5. おわりに

本論文は、クラックテンソルによる巨視的弾性コンプライアンスをミロナイト岩石供試体、及び石膏供試体による実験、そしてジョイント要素を用いた有限要素解析による数値実験と比較検討したものである。それらの結果がいずれの場合も互いに整合的であったことは注目してよい。また、ジョイント要素による解析で必要とした要素数は59～456と大きく、メッシュ分割には細心の注意を必要とした。以上のことから考えて、クラックテンソルによる巨視的弾性コンプライアンスは亀裂を含む岩盤を評価、解析する上で、有効かつ実用的であると結論づけられる。

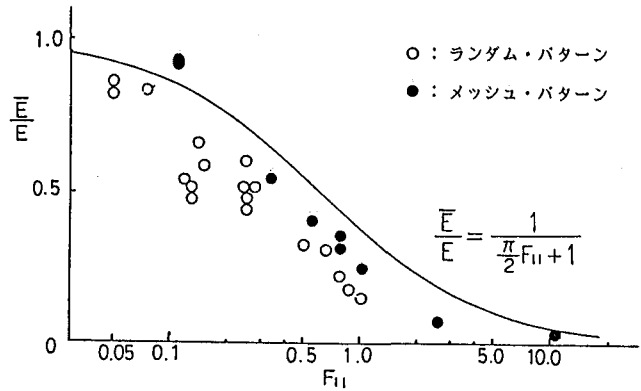


図-7 数値実験結果(巨視的弾性定数)

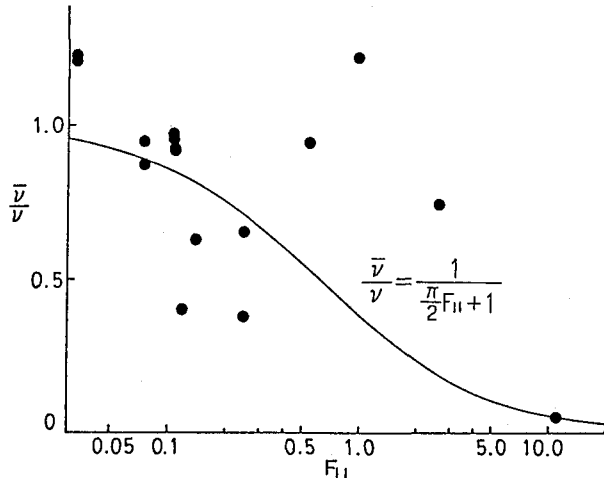


図-8 数値実験結果(ポアソン比)

(37) Study on Overall Elastic Compliance Tensor for Jointed Rock Masses.

Saitama Univ. N.Hara, T.Nakajima,
M.Oda and T.Yamabe
Taisei Constraction Co. K.Kamemura

ABSTRACT

An elastic compliance tensor for jointed rock masses is theoretically formulated in terms of the crack tensor which has been introduced as an index measure to express explicitly crack geometry. The following three types of uniaxial compression tests were carried out to examine the usefulness of the elastic compliance tensor. That is, 1) mylonite samples with various joints filled with clay minerals; 2) gypsum plaster samples with artificial cracks; and 3) numerical tests using finite element method.

The conclusion are summarized as follows: 1) Elastic compliance formulated by crack tensor is very practical to estimate the overall elastic moduli of jointed rock masses; 2) In spite of variety of the crack geometry, the overall elastic moduli is fairly well given by the crack tensor analysis; and 3) Elastic compliance formulated by the crack tensor analysis tend to give an upper bound when compared with the experimental results.

参考文献

- 1) M.Oda : An Equivalent Continuum Model for Coupled Stress and Flow Analysis in Jointed Rock Masses, Water Resources Reserches, Vol.22, No.13, pp.1845-1856, December, 1986.
- 2) 山辺、原、小田、：クラックテンソルによる節理性岩盤の弾性変形解析と入力パラメータの決定に関する研究, 土木学会論文集, 第382号, III-7, PP.121-130. 1987年, 6月.
- 3) M.Oda : An Experimental Study on Elasticity of Mylonite Rock with Random Cracks, Int.J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.(to appear)
- 4) M.Oda, K.Suzuki, T.Maeshibu : Elastic Compliance for Rock-Like Material with Random Cracks, Soil and Foundations, Vol.24, No.3, pp.27-40, September, 1984.
- 5) R.E.Goodman : Method of Geological Engineering in Discontinuous Rock.