

大成建設(株) 技術研究所 下茂道人

大成建設(株) 技術研究所 亀村勝美

1. はじめに

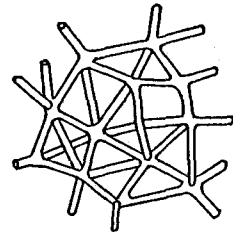
地下水の流れに伴う地盤内の物質移行現象を確率論的な立場から捉えようとする試みは、とくに空隙体を対象にして行われてきた^{1),2),3)}。Saffmanらは、空隙体内の流れの場を図-1に示すような、ランダムな方向に向いた一定半径 a 、一定長さ l の細管の樹枝状結合体でモデル化し、各細管内の流れを、Hagen-Poiseuille流れに従うものと考えた。そして、ある時間内における流体粒子の確率的な変位距離を理論的に計算し、浸透層内を移動する流体粒子の縦方向分散係数が、次式で表されることを示した。

$$D_x = (X - U_{mx} T)^2 / 2T = U_{mx}^2 S^2 / 2 \quad (1)$$

ここに、 $U_{mx} (= a^2 P_{gx} / 24\mu)$ 、 P_{gx} : 圧力勾配、 μ : 粘性係数) は、 x 方向の実質平均流速であり、定数 S^2 は、流体粒子が1本の細管内を平均流速で移動する時間が、分子拡散で移動する時間に比べてずっと小さい場合には、次式により計算される⁴⁾。

$$S^2 = \frac{1}{48} \left\{ \log \left(\frac{54 U_{mx} T}{l} \right) \right\}^2 = \frac{1}{48} \left\{ \log(36 \bar{N}) \right\}^2 \quad (2)$$

ここに、 $\bar{N} (= 3 U_{mx} T / 2l)$ は、時間 T 内に粒子が通過するステップ数(細管の数)の期待値である。

図-1 樹枝状結合体モデル⁴⁾

岩盤内の節理系についても、例えば図-2に示したようなモデルを考えると、Saffmanらと同様な手法を用いて、分散特性の評価を行うことができると期待される。しかし、この場合には、①細管による流路のモデル化②流路長一定、③ランダムな流路の方向、④全流路の完全な連続性、⑤流速分布の一様性、などの仮定が節理系にも適用出来るか否かの吟味が必要であろう。本報では、従来空隙体に用いられてきた確率論的方法を基本的に受け継ぎ、これを節理性岩盤に対するモデルに発展させる試みの手始めとして、基本的な検討を行った結果について述べる。



図-2 円盤節理モデル

2. 理論的考察

岩盤内の物質の移動は、節理特性および、地下水流速の空間分布に大きく依存すると考えられる。ここでは、①流路長が、ある確率分布に従って分布している場合、②流速も、ある確率分布に従って分布している場合、の2種類のケースについて、節理系の縦方向分散係数の評価式を、ランダムウォークモデルにより導く。なお、以下においては、2次元モデルを考えているが、これは主に、次節における数値解析モデルとの比較を行うためであり、基本的な考え方は、3次元の場合についても変わらない。

2.1 ランダムウォークモデル

隣り合う2つの節理交差部間を、単位の流路と考え、その長さを l_j 、 x 軸となす角度を θ_j とすると、 N 個の流路を通過したときの粒子の移動距離は、次式で表される。

$$(X_N, Y_N) = \left(\sum_{j=1}^N x_j, \sum_{j=1}^N y_j \right) = \left(\sum_{j=1}^N l_j \cos \theta_j, \sum_{j=1}^N l_j \sin \theta_j \right) \quad (3)$$

今、節理の方向分布をランダムとし、また、各ステップの流路方向および長さの間に相関がないものとする、多数の粒子の平均的な位置 $(\bar{X}_N, \bar{Y}_N)$ 、および縦方向分散 $\text{Var}[X_N]$ は、次のように求められる。

$$(\overline{X_N}, \overline{Y_N}) = E\left(\sum_{j=1}^N l_j \cos \theta, \sum_{j=1}^N l_j \sin \theta\right) = \left(\frac{N}{n} \int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \int_0^{\infty} l \cos \theta g(l) d\theta dl, \frac{N}{n} \int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \int_0^{\infty} l \sin \theta g(l) d\theta dl\right) = \left(\frac{2}{n} N \bar{l}, 0\right) \quad (4)$$

$$\text{Var}[X_N] = E[(X_N - \overline{X_N})^2] = E\left[\left(\sum_{j=1}^N l_j \cos \theta - \frac{2}{n} N \bar{l}\right)^2\right] = \frac{N}{2} \left\{ \text{Var}[l] + \left(1 - \frac{8}{n^2}\right) \bar{l}^2 \right\} \quad (5)$$

ここに、 $g(l)$ は、流路長 l の分布関数であり、 $\bar{l}$ および $\text{Var}[l]$ は、それぞれ流路長の平均値と分散である。

よって、定義より、縦方向分散係数 D_x および縦方向分散長さ a_x は、

$$D_x = \frac{\text{Var}[X_N]}{2T_N} = \frac{U_{mx}}{n\bar{l}} \left\{ \text{Var}[l] + \left(1 - \frac{8}{n^2}\right) \bar{l}^2 \right\}, \quad a_x = D_x / U_{mx} = \frac{1}{n\bar{l}} \left\{ \text{Var}[l] + \left(1 - \frac{8}{n^2}\right) \bar{l}^2 \right\} \quad (6)$$

となる。なお、 N ステップ終了までの平均所要時間は、 $T_N = N\bar{l} = N\bar{l} / \bar{U} = Nn\bar{l} / (4U_{mx})$ で近似的に計算できるものと仮定した。ここに、 $\bar{U}$ は、各細管内平均流速の平均値である。

2.2 より一般的なランダムウォークモデル

次に、流路長、流路方向および流速が、空間内である確率分布に従って分布する場合について考える。今、 j 番目のステップの単位移動距離 x_j, y_j および移動時間 t_j が、次の様に l_j, θ_j および u_j の関数であり、

$$x_j = x_j(l_j, \theta_j), \quad y_j = y_j(l_j, \theta_j), \quad t_j = t_j(l_j, \theta_j, u_j) \quad (7)$$

また、それらの分布が、確率密度関数 $f_j(x_j, y_j, t_j)$ で表されるものとする、 N ステップ後の粒子が、 $X \sim X + dX, Y \sim Y + dY, T \sim T + dT$ にある確率は、次の様な同次確率密度関数で表される。

$$P_N(X, Y, T) dX dY dT = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_j, y_j, t_j) \prod_{j=1}^N \left\{ f_j(x_j, y_j, t_j) dx_j dy_j dt_j \right\} dX dY dT \quad (8)$$

ここに、 δ は $\Sigma x, \Sigma y, \Sigma t$ が $X \sim X + dX, Y \sim Y + dY, T \sim T + dT$ にある場合にのみ1で、それ以外のときは、0であるような性質を有する関数である。この δ にDirichletの不連続積分公式を適用すると(8)式は、

$$P_N(X, Y, T) dX dY dT = \frac{dX dY dT}{(2n)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp\left\{-i(\xi X + \eta Y + \tau T)\right\} A_N \quad (9)$$

となる⁵⁾。ここに、

$$A_N = \prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp\{i(\xi x_j + \eta y_j + \tau t_j)\} f_j(x_j, y_j, t_j) \quad (10)$$

確率密度関数 $f_j(x_j, y_j, t_j)$ が、ステップ数 j に対して独立であり、かつステップ数が、非常に大きいと仮定して、(9)式の積分を実施すると、

$$P_N(X, Y, T) dX dY dT = \frac{dX dY dT}{(2nN)^2 A^2} \exp\left\{\frac{-1}{2NA} \left[B(X - N\bar{x})^2 + C(Y - N\bar{y})^2 + D(T - N\bar{t})^2 \right. \right. \\ \left. \left. - 2E(X - N\bar{x})(Y - N\bar{y}) - 2F(Y - N\bar{y})(T - N\bar{t}) - 2G(X - N\bar{x})(T - N\bar{t}) \right] \right\} \quad (11)$$

となる。ここに、

$$A = \langle x^2 \rangle \langle y^2 \rangle \langle t^2 \rangle - \langle x^2 \rangle \langle y t \rangle^2 - \langle y^2 \rangle \langle x t \rangle^2 - \langle t^2 \rangle \langle x y \rangle^2 + 2 \langle x y \rangle \langle y t \rangle \langle x t \rangle$$

$$B = \langle y^2 \rangle \langle t^2 \rangle - \langle y t \rangle^2, \quad C = \langle x^2 \rangle \langle t^2 \rangle - \langle x t \rangle^2, \quad D = \langle x^2 \rangle \langle y^2 \rangle - \langle x y \rangle^2$$

$$E = \langle t^2 \rangle \langle x y \rangle - \langle y t \rangle \langle x t \rangle, \quad F = \langle x^2 \rangle \langle y t \rangle - \langle x y \rangle \langle x t \rangle, \quad G = \langle y^2 \rangle \langle x t \rangle - \langle x y \rangle \langle y t \rangle \quad (12)$$

また、 $\langle x^2 \rangle, \langle y^2 \rangle, \dots, \langle x y \rangle, \dots$ は、各確率変数の2次のモーメントであり、流路長、方向および流速についての確率密度関数 $g(l, \theta, u)$ を与えることにより、次式で計算される。

$$\langle \xi \eta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x, y, t) \eta(x, y, t) f(x, y, t) dx dy dt = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \xi(l, \theta, u) \eta(l, \theta, u) g(l, \theta, u) dl d\theta du \quad (13)$$

ある時刻Tにおいて、粒子が、 $X \sim X + dX$ に存在する確率は、次のような条件付き確率として計算される。

$$P(X|T) = \frac{\int_0^\infty P_N(X, T) dN}{\int_0^\infty P_N(T) dN} \quad (14)$$

分母、分子の積分は、 $P_N(X, Y, T)$ を、YおよびXに関して積分することにより、下記のように求められる。

$$P_N(X, T) dX dT = \frac{dX dT}{2nNC^2} \exp \left[\frac{-1}{2NAC} \left\{ (BC - E^2)(X - N\bar{x})^2 + (CD - F^2)(T - N\bar{t})^2 - 2(EF + GC)(X - N\bar{x})(Y - N\bar{y}) \right\} \right] \quad (15)$$

$$P_N(T) dT = \left[\frac{A}{2nN(BC - E^2)} \right]^{\frac{1}{2}} dT \exp \left[\frac{-1}{2NAC} \left\{ \frac{(BC - E^2)(CD - F^2) - (EF + GC)^2}{(BC - E^2)} \right\} (T - N\bar{t})^2 \right] \quad (16)$$

よって、分散係数の定義より、

$$D_x = \frac{\text{Var}(X)}{2T} = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} (X - \bar{X})^2 P(X|T) dX \quad \text{ここに、} \quad \bar{X} = \int_{-\infty}^{\infty} X P(X|T) dX \quad (17)$$

これより、 l, θ および u の分布関数を与えることにより、分散係数が、理論的または、数値解析的に求まる。

3. 数値解析結果との比較

Saffmanモデル、および前節に提示したモデルの適用性を吟味するために、不連続モデル⁶⁾を用いた数値解析結果と1、2節に示した確率論的モデルとの比較を行う。

計算条件: 不連続モデルによる物質移行計算は、次の4段階からなる。まず、①領域(8m×8m)内に、ランダムな方向性を有する、一定長さ $L=1\text{m}$ 、一定開口幅 $b=10^{-5}\text{m}$ および、密度 $\rho_A=10(\text{本}/\text{m}^2)$ の2次元節理系を発生させ、②x方向動水勾配 $i_x=0.1$ のもとで各節理内の流速分布を求める。③次に、求められた流速および流量を用いて、節理系内の物質移行の計算を行い、流出境界上でのBreakthrough曲線を求める。最後に、④一次元移流分散方程式の解とのfittingにより、節理系の等価な縦方向分散係数 D_x および、平均実流速 U_{mx} を求める。

一方、確率論的なアプローチによる分散係数の評価には、流路の長さ、方向および、流速の分布を知る必要があるが、これらは、以下のようにして評価した。**[流路長分布]** 空間内にランダムに存在する節理どうしの交差は、ランダムに発生するから、単位長さ当たりの節理交差数は、ポアソン分布に従う。よって、節理交差部間の長さすなわち、流路長は、指数分布に従うものと考えられる。

Robinson⁷⁾は、この場合の平均流路長が、 $l=n/(2\rho_A L)$ で求められることを示した。図-3に示すように、 $l=n/(2 \times 10 \times 1)=0.157\text{m}$ として求めた結果と、数値解析で実際に得られた流路長の分布とは、良く対応する。

[方向] ここでは、ランダムの場合だけを考える。

[流速分布] Robinson⁷⁾はバーコレーション理論の応用により、平均空隙内流速が、 $U_x = \rho_A L g b^3 i_x (1 - 4/\lambda) / (24 v \phi_f)$ で評価できることを示した。ここに、 $\phi_f = \rho_A L b (1 - 2/\lambda)$ および λ は、それぞれ、dead-end部を除いた空隙率および、節理1本当たりの平均交差数であり、 λ は、 $2\rho_A L^2/n$ で計算される。 $g/v=10^7\text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$ として、平均空隙内流速を計算すると、 $U_{mx}=2.23 \times 10^{-6}\text{m/s}$ となり、数値解析の結果、 $2.36 \times 10^{-6}\text{m/s}$ と良く一致した。流速の方向依存性については、図-4に示すように数値解析結果を、 $U_m(\theta) = U_m(a \cdot \cos \theta + b)$ のような関

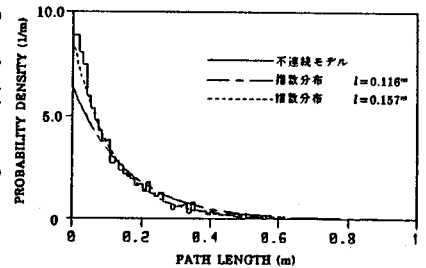


図-3 流路長分布

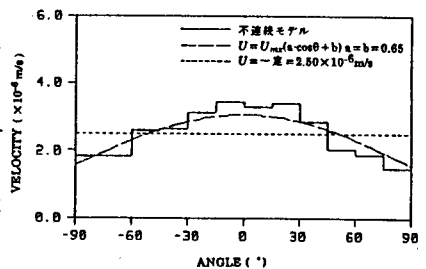


図-4 流速と流路方向の関係

数型で仮定し、① $U_{mx}=2.36 \times 10^{-6} \text{m/s}$ 、 $a=b=0.65$ および、② $U_m(0)=一定=2.50 \times 10^{-6} \text{m/s}$ の2種類の流速分布について、分散係数を算出した。

計算結果： 図-5の実線は、不連続モデルにより計算された、流出境界($X=8\text{m}$)における、Breakthrough曲線の例を示す。実線以外は、移流分散方程式の解による、fittingを試みたものである。20回の異なる節理系の発生により、縦方向分散係数、平均実流速および、縦方向分散長さは、それぞれ、 $D_x=6.74 \pm 1.61 \times 10^{-7} \text{m}^2/\text{s}$ 、 $U_{mx}=2.36 \pm 0.20 \times 10^{-6} \text{m/s}$ 、 $\alpha_L=0.29 \pm 0.09 \text{m}$ であった。表-1は、この結果と、各確率モデルの結果を、比較したものである。また、図-6は、(14)式により、計算した、粒子の空間的な存在確率分布を示す。これより、粒子は、ほぼ正規分布にしたがって存在していることが分かる。正規分布は、Fickianモデルによる、一次元移流分散方程式の解からも予想される結果である。

考察： 表-1に示したように、不連続モデルと、確率論モデルの結果には、10~30倍近くの差異が見られる。筆者らは、Robinsonの粒子追跡モデルを用いて、節理密度だけをさらに30本/ m^2 まで増加させた計算を行ったが、数値解析の結果は今回と同様に $p\alpha_L \approx 3$ 程度であった。この差異の一つの理由としては、節理の不連続性に起因する流速分布の影響が考えられる。すなわち、Saffmanモデルや、今回

示した確率論モデルにおいては、すべての流路は完全に連続しているものと考え、流速を流路方向のみの関数であると仮定した。しかし、数値解析により計算された各流路内の流速は、ある方向だけについてみても広く分布しており、この流速のバラツキが結果的に大きな分散を生じる原因になるものと考えられる。現在、流速の空間分布が、分散係数に与える影響について、さらに検討を続けている。

4. まとめ

以上、ランダムウォークモデルに基礎をおいた、節理系内の分散現象に対する理論的なアプローチを試みた。しかし、今回示した分散係数の評価式からは、不連続モデルによる、数値実験結果と、大きく異なる結果がえられ、従来空隙体に対して、有効であったモデルが、節理系にたいしては、そのまま適用できないことが示唆された。今後、節理系内の、分散現象にあたえる影響因子を詳細に検討し、不連続な節理系に対する分散特性に関する新たな、評価式の誘導を目指したい。

[謝辞] 本研究の実施にあたり御指導頂いた九州大学工学部、水工土木学科の神野助教授に深く感謝致します。

[参考文献]

1. A. E. Scheidegger (1954) "Statistical hydrodynamics in porous media", J. Appl. Phys. Vol. (258) 2. G. De Josselin De Jong (1958) "Longitudinal and Transvers Diffusion in Granular Deposit" AGU Vol. (139) 3. P. G. Saffman (1959) "A Theory of Dispersion in a Porous Medium" J. Fluid Mech. Vol. 6 4. 神野健二 (1979) "浸透層内の縦方向分散係数および細管モデルについて"、日本地下水学会誌、第21巻、第21号 5. S. Chandrasekhar (1943) "Stochastic Problem in Physics and Astronomy" Rev. Mod. Phys., 15, 6. 下茂他 (1986) "岩盤裂隙系内の物質移行に関する数値解析的研究"、第18回岩盤力学に関するシンポジウム、土木学会 7. P. C. Robinson (1984) "Connectivity, Flow and Transport in Network Models of Fractured Media" Ph.D Thesis, Oxford Univ., AERE TP. 1072

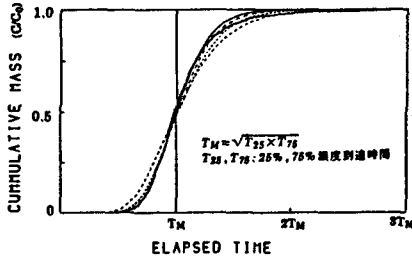


図-5 Breakthrough 曲線 (数値解析結果)

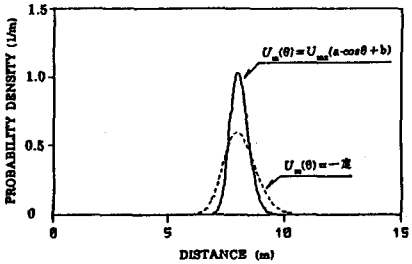


図-6 粒子の空間分布確率 (式14)

表-1 計算された分散特性の比較

モデル	縦方向分散係数 $D_x (\text{m}^2/\text{s})$	縦方向分散長さ $\alpha_L (\text{m})$	備考
不連続モデル	6.74×10^{-7}	0.29	
Saffmanモデル	4.67×10^{-8}	0.0193	*
2.1階のモデル	1.40×10^{-7}	0.0694	*
2.2階のモデル	2.30×10^{-8}	0.0097	**
*	6.80×10^{-8}	0.0280	***

* $U_{mx}=2.36 \times 10^{-6} \text{m/s}$ 、 $l=0.167 \text{m}$ とする。

** $U_m(0)=U_{mx}(a \cdot \cos \theta + b)$ 、 $a=b=0.65$

*** $U_m(0)=一定=2.50 \times 10^{-6} \text{m/s}$

(33) Theoretical Study on Dispersion Properties of Fractured rock mass

by

Michito Shimo and Katsumi Kamemura

(Taisei Corporation)

Summary

The stochastic models based on a generalized random walk models for evaluating dispersion properties of fracture networks with variable path length, orientation and velocity distributions are proposed. The basic concept of these models have been already shown, by Saffman, De Josselin De Jong, Scheidegger and other researchers, for the evaluation of dispersion properties of porous media which is modeled by connected flow tubes with constant length, random orientation and through which fluid moves with rather uniform velocity distribution. The purpose of study is to see if the similar approach is applicable for rock mass which is characterized by discontinuities such as fractures and faults in different scales.

These models simply take convective transport into account as a mechanism of movement of substance resolved in a fluid flowing through each fracture. Thus, the substances disperse through networks as a result of spacial variations of path length, orientation and fluid velocity.

The preliminary results using these models, with assumptions that the average fluid velocity in each fracture is merely a function of path orientation, reveals that:

1. Spatial distribution of substances after traveling many flow paths follows Gaussian distribution which is also expected in the conventional Fickian model.

2. The dispersion properties calculated by both the proposed models and conventional Saffman model showed large discrepancies with those calculated by numerical mass transport model using artificially generated fracture networks.

It was suggested that the conventional stochastic approach cannot predict the dispersion properties of fracture networks precisely, possibly due to a wide variation of fluid velocity in a individual fracture. To establish a more realistic models for evaluating dispersion properties of fracture networks, it may be important to take this velocity distribution into account more properly.