(61) 調和一点加振による地盤粘弾性定数の測定

日本大学理工学部 ○ 岩井 茂雄
同 色部 誠

1．まえがき

本報告でいう調和点加振とは地表面直径35 cmの円形領域に対する鉛直調和加振である。使用加振器が小型小出力のものであったので、計測は加振点近傍の地表でなされている。計測現場は土質地盤であったため、伝播波速度の周波数依存性は明瞭であった。半無限体に対する表面調和加振の弾性解は古くから知られている。その解によって計測値を解析しても満足のゆく結果は得られなかった。よって、減衰が周波数に依存することに注目して、地盤の減衰を粘性減衰と見なし、弾性解に対応原理を用いて得られる粘弾性解を導き、計測値の解析を試みた。以下に、粘弾性解の誘導と計測値の一部を示す。ここに示す方法は、加振器の容量・型式によっては、軟質岩盤上あるいは同岩盤内の計測結果にも使い得るものである。

2．波動方程式の弾性解－半無限体軸対称の場合－

(i) 運動方程式 $\sigma_{ij,j}+X_i=\rho\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ （X_i：物体力，ρ：単位質量，u_i：変位） (1)

(ii) 連続方程式 $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+(\rho\dot{u}_i)_{,i}=0$ (2)

(iii) 適合条件 $e_{ij}=\dfrac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$ (3)

(iv) 弾性法則 $\sigma_{ij}=\lambda e_{kk}\delta_{ij}+2Ge_{ij}$ （λ, G：弾性定数，δ_{ij}：クロネッカーデルタ）

または $\sigma'_{ij}=2Ge'_{ij}$ ，$\sigma_{kk}=e_{kk}(3\lambda+2G)$ （$'$：偏差成分） (4)

以上の基礎方程式(3)と(4)を式(5)に入れれば、Navierの方程式

$$G u_{i,jj}+(\lambda+G)u_{j,ji}+X_i=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad (5)$$

を得る。等方一様な半無限体の表面の一点を点源とする波動の伝播問題において地表面の解のみを論ずるなら、円筒座標を用いるのが都合がよい。軸対称ゆえ、変位その他の従属変数は独立変数θには依存せず、また周方向変位vは生じない。点源での入力が調和的で、$Le^{i\omega t}$と表されれば、ポテンシャル$\Phi=\varphi e^{i\omega t}$, $\Psi=\psi e^{i\omega t}$を導入し、半径方向および鉛直方向の変位u, wを

$$u=\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial z}, \qquad w=\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} \qquad (6)$$

とおき、これを式(5)に用いて得られる波動方程式

$$(\nabla^2+c_1^2)\varphi=0 \quad ただし \quad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad c_1^2=\omega^2\Big/\frac{\lambda+2G}{\rho}=\frac{\omega^2}{v_p^2}$$

$$(\nabla^2+c_2^2)\psi=0, \qquad c_2^2=\omega^2\Big/\frac{G}{\rho}=\frac{\omega^2}{v_s^2} \qquad (7)$$

から解が導かれる。解の誘導については、Ewing, Jardetzky, Press (1957)*に詳しい。やや、表現を変えて、以下の展開に必要な事項のみを記す。式(7)の一般解から得られる変位$\bar{u}$, $\bar{w}$および応力$\bar{\sigma}_{zz}$, $\bar{\tau}_{rz}$は

$$\bar{u}=-k(Ae^{-\nu_1 z}-\nu_2 Be^{-\nu_2 z})J_1(kr), \qquad \bar{w}=(-\nu_1 Ae^{-\nu_1 z}+k^2Be^{-\nu_2 z})J_0(kr) \qquad (8)$$

$$\bar{\sigma}_{zz}=\{\lambda(\nu_1^2-k^2)Ae^{-\nu_1 z}+2G(\nu_1^2Ae^{-\nu_1 z}-k^2\nu_2Be^{-\nu_2 z})\}J_0(kr), \quad \bar{\tau}_{rz}=G\{2k\nu_1Ae^{-\nu_1 z}-k(\nu_2^2+k^2)Be^{-\nu_2 z}\}J_1(kr) \qquad (9)$$

となる。　ただし、$\nu_1^2=k^2-c_1^2$, $\nu_2^2=k^2-c_2^2$, また A, B は積分定数である。
鉛直力 $Le^{i\omega t}$ の作用点を原点とすれば、境界条件は

$$(\sigma_{zz})_{z=0}=-\frac{L}{2\pi}\int_0^\infty J_0(kr)\,k\,dk\,,\qquad (\tau_{rz})_{z=0}=0 \tag{10}$$

のように表せる。　式(9)に式(10)を用いて積分定数を定め、特解

$$u=\frac{L}{2\pi}\int_0^\infty\frac{k^2(se^{-\nu_1 z}-\nu_2 te^{-\nu_2 z})}{ps-qt}J_1(kr)dk\,e^{i\omega t},\qquad w=\frac{L}{2\pi}\int_0^\infty-\frac{k(\nu_1 se^{-\nu_1 z}-k^2te^{-\nu_2 z})}{ps-qt}J_0(kr)dk\,e^{i\omega t} \tag{11}$$

を得る。　ただし

$$p=(\lambda+2G)\nu_1^2-\lambda k^2,\qquad q=2Gk^2\nu_2,\qquad t=2\nu_1,\qquad s=2k^2-c_2^2 \tag{12}$$

である。　式(12)において $z=0$ とおけば、地表の変位 u_0, w_0 を得る。　無限積分の結果は大きく分けて三つの部分からなる。　Rayleigh 波に依存する部分、P波に依存する部分，S波に依存する部分である。　このうち、第二、第三の部分は加振点から離れるにしたがい、急速に0に収束する。　これらを無視すれば、u_0, w_0 は、

$$u_0=\frac{L}{\sqrt{2\pi\kappa r}}\;\frac{\kappa^2\left(2\kappa^2-c_2^2-\sqrt{\kappa^2-c_1^2}\sqrt{\kappa^2-c_2^2}\right)}{F'(\kappa)}\;e^{i(\omega t-\kappa r+\frac{\pi}{4})},\qquad w_0=\frac{iL}{\sqrt{2\pi\kappa r}}\;\frac{\kappa c_2^2\sqrt{\kappa^2-c_1^2}}{F'(\kappa)}\;e^{i(\omega t-\kappa r+\frac{\pi}{4})} \tag{13}$$

となる。　上式より u_0, w_0 の振巾比Rをつくれば

$$R=\kappa\left(2\kappa^2-c_2^2-\sqrt{\kappa^2-c_1^2}\sqrt{\kappa^2-c_2^2}\right)\Big/c_2^2\sqrt{\kappa^2-c_1^2} \tag{14}$$

を得る。　式(13),(14)のなかの κ は $ps-qt=0$ を満足する k に関する方程式、Rayleigh 方程式

$$F(k)=16(c_1^2-c_2^2)k^6-8c_1^2(2c_1^2-3c_2^2)k^4-8c_2^6k^2-c_2^8=0 \tag{15}$$

の根であって、変位（式(13)）の指数関数部分から明らかなように、κ はRayleigh波の波長 l の逆数と 2π の積である。　上に得た関係は球面波に対するものであるが、平面波の解からも式(14),(15)と同じ関係が得られる。
地表の応答観測から二成分の加速度振巾および表面波の波長 l が得られれば、振巾比によってRが、また $2\pi/l$ によって κ が求まる。　R, κ を式(14)に、κ を式(15)の左に入れ、これら二式を解いて得られる c_1^2, c_2^2 を式(7)に用いてP波，S波の速度および弾性定数 λ, G が求められる。

3. 波動方程式の粘弾性解

式(13)は、$u_0=\bar{u}_0e^{i\omega t}$, $w_0=\bar{w}_0e^{i\omega t}$ と書ける。　$\bar{u}_0, \bar{w}_0$ は複素変位振巾であり、物理的な表面変位は $\bar{u}_0e^{i\omega t}$, $\bar{w}_0e^{i\omega t}$ の実部または虚部によって得られる。　すなわち、変位，ひずみ，応力はすべて複素振巾を用いて

$$u_i=\bar{u}_ie^{i\omega t},\qquad e_{ij}=\bar{e}_{ij}e^{i\omega t},\qquad \sigma_{ij}=\bar{\sigma}_{ij}e^{i\omega t} \tag{16}$$

のように表すことができる。　ここでも

$$\bar{e}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\bar{u}_{i,j}+\bar{u}_{j,i}\right) \tag{3$'$}$$

である。　式(1)に式(16)を用いれば、複素振巾を用いて運動方程式は

$$\bar{\sigma}_{ij,j}+\bar{X}_i=-\rho\omega^2\bar{u}_i \tag{1$'$}$$

のように表せる。
半無限体の構成材料が粘弾性材料である場合にも、入力が $Le^{i\omega t}$ であれば、応答は調和的であり、上の三式と

同様の関係が成立する。弾性解との違いは構成則の違いによって生ずる。粘弾性材料に対して得られる積分型構成則は、合成積によってつぎのように書かれる。

$$\sigma'_{ij} = e'_{ij} * dG , \qquad \sigma_{kk} = e_{kk} * dK$$

この両辺にFourier変換を施せば

$$\bar{\bar{\sigma}}'_{ij} = \bar{\bar{e}}'_{ij}\, i\omega \bar{\bar{G}}(\omega), \qquad \bar{\bar{\sigma}}_{kk} = \bar{\bar{e}}_{kk}\, i\omega \bar{\bar{K}}(\omega) = \bar{\bar{e}}_{kk}\, i\omega \left(3\bar{\bar{\lambda}}(\omega) + 2\bar{\bar{G}}(\omega)\right) \qquad (4)'$$

$\bar{\bar{G}}(\omega)$, $\bar{\bar{K}}(\omega)$, $\bar{\bar{\lambda}}(\omega)$ は緩和関数 $G(t)$, $K(t)$, $\lambda(t)$ のFourier変換であり、複素弾性係数にほかならない。式(1)′, (3)′, (4)′は式(1), (3), (4)と形の上では変わりなく、したがって、式(5)からただちに粘弾性体に対するNavierの方程式として

$$i\omega \bar{\bar{G}}(\omega)\bar{\bar{u}}_{i,jj} + \left[i\omega \bar{\bar{\lambda}}(\omega) + i\omega \bar{\bar{G}}(\omega)\right]\bar{\bar{u}}_{j,ji} + \bar{\bar{X}}_i = -\rho\omega^2 \bar{\bar{u}}_i \qquad (5)'$$

を得る。式(7)に示す c_1^2, c_2^2 に対して

$$\bar{\bar{c}}_1^2 = \frac{\omega^2 / i\omega\left[\bar{\bar{\lambda}}(\omega) + 2\bar{\bar{G}}(\omega)\right]}{\rho}, \qquad \bar{\bar{c}}_2^2 = \frac{\omega^2 / i\omega \bar{\bar{G}}(\omega)}{\rho} \qquad (7)'$$

をつくれば、前節と同じ手続きにより、$\bar{\bar{c}}_1^2$, $\bar{\bar{c}}_2^2$ に関する二つの方程式

$$\varkappa^2\left(2\varkappa^2 - \bar{\bar{c}}_2^2 - \sqrt{\varkappa^2 - c_1^2}\sqrt{\varkappa^2 - \bar{\bar{c}}_2^2}\right) = R\bar{\bar{c}}_2^2\sqrt{\varkappa^2 - \bar{\bar{c}}_1^2} \qquad (14)'$$

$$16\left(\bar{\bar{c}}_1^2 - \bar{\bar{c}}_2^2\right)\varkappa^6 - 8\bar{\bar{c}}_2^2\left(2\bar{\bar{c}}_1^2 - 3\bar{\bar{c}}_2^2\right)\varkappa^4 - 8\bar{\bar{c}}_2^4\varkappa^2 + \bar{\bar{c}}_2^8 = 0 \qquad (15)'$$

を得る。

式(14)′, (15)′より求まる $\bar{\bar{c}}_1^2$, $\bar{\bar{c}}_2^2$ を式(7)′に用いて $\bar{\bar{\lambda}}(\omega)$, $\bar{\bar{G}}(\omega)$ を定め、それらのFourier逆変換によって緩和関数 $\lambda(t)$, $G(t)$ を導くことができる。測定が甚しく離散的な振動数 ω によって行なわれる場合、逆変換の有効性は疑わしい。むしろ、$\lambda(t)$, $G(t)$ を有限項の級数に表し、各項の係数を求めることのほうが実際的であろう。いま、

$$\lambda(t) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \exp\left(-\frac{t}{T_{\lambda n}}\right), \qquad G(t) = \sum_{n=1}^{N} G_n \exp\left(-\frac{t}{T_{Gn}}\right) \qquad (17)$$

とおく。λ_n, G_n は緩和弾性率、$T_{\lambda n}$, T_{Gn} は緩和時間である。式(17)にFourier変換を施せば次式を得る。

$$\left.\begin{aligned} \bar{\bar{\lambda}}(\omega) &= \lim_{T\to\infty}\int_0^T \lambda(t)\, e^{-i\omega t}dt = \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n T_{\lambda n} - i\omega T_{\lambda n}^2}{1 + \omega^2 T_{\lambda n}^2} \\ \bar{\bar{G}}(\omega) &= \lim_{T\to\infty}\int_0^T G(t)\, e^{-i\omega t}dt = \sum_{n=1}^{N} \frac{G_n T_{Gn} - i\omega T_{Gn}^2}{1 + \omega^2 T_{Gn}^2} \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

すべての n に対して $T_{\lambda n} = T_{Gn}$ とし得るので、緩和時間を統一して T_n とし、式(18)を式(7)′に代入すれば、$\bar{\bar{c}}_1^2$, $\bar{\bar{c}}_2^2$ はつぎのようになる。

$$\bar{\bar{c}}_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{3\omega^2 T_n^2 + i\omega(\lambda_n + 2G_nT_n)}{1 + \omega^2 T_n^2}}, \qquad \bar{\bar{c}}_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{\omega^2 T_n^2 + i\omega G_nT_n}{1 + \omega^2 T_n^2}} \qquad (19)$$

これらを式(14)′, (15)′に代入すれば、λ_n, G_n, T_n に関する連立方程式を得る。いま、$N=2$ とすれば、未知量 λ_n, G_n, T_n の総数は6個となり、これらを明らかにするには、少なくとも6個の方程式を必要とするので、3つの異なる振動数 ω によって $\varkappa$ と R の値を測定すればよい。

4. 計測結果

使用加振器は商品名 APS (Acoustic Power System) − 113 最大加振力13.6 kg の電磁式振動加振器であ

る。　使用可能の周波数範囲は0.1～100Hz とされている。　地盤の加振周波数は、35Hzから70Hzまで5Hzおきの8段階とした。　加速度の測定は圧電型加速度計によった。　測点は、加振域中心から50, 100, 150, 200, 250 cm の距離の5点とした。

地中に転在する礫・砂利からの反射波の影響によるものか不明であるが、50Hz以下の周波数の場合、加振点近くではRは1より小さいが、遠ざかるにしたがい1より大となるのに対し、55Hz以上の周波数の場合はこれと逆の傾向が現われる。　概略を示せば、図-1のとおりである。図に見られるように、土質地盤のRは弾性体の場合の振巾比0.577よりつねに大きい。

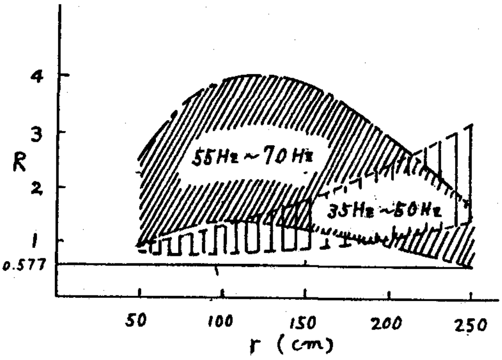

図-1　周波数－R－rの関係

地盤定数の算定には、低周波側の計測値によることのほうが適当と考えられる。　表面波の波長は、測点における応答の位相の遅れから定められる。　図-2に位相の遅れを示す。　表-1に、振動数が35, 40, 50 Hz のときのRとℓを示す。

これらの計測結果からは、測定個所の選択や加振方法に検討の必要が認められる。

表 - 1

周波数	R	ℓ
35 Hz	0.829	約235 cm
40	0.847	〃 204
50	0.879	〃 144

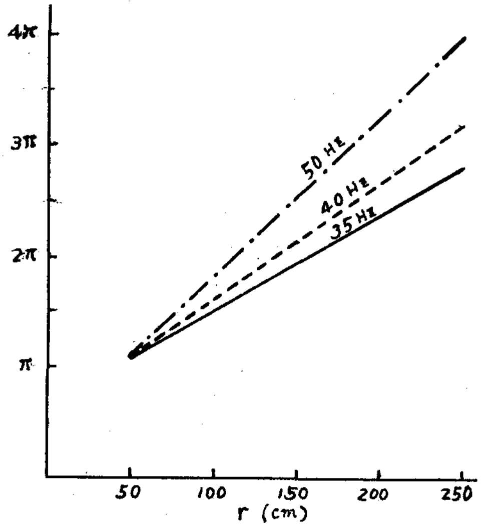

図-2　周波数－位相遅れ－rの関係

5．あとがき．

土質地盤の表面波の測定値から地盤粘弾性定数を決定するのに用い得る計算式と定常調和点加振による実地盤表面の加速度応答の測定例の一つを示した。　計測値から得られる地盤定数と地盤の動特性については別途報告する。

参考文献

＊ Ewing, M. W. , W. S. Jardetzky & F. Press; "Elastic Waves in Layered Media", McGraw-Hill, (1957)

(61) On the Responce of Viscoelastic Ground due to Harmonic Excitation at a Surface Point and Determination of its Dynamic Properties

Shigeo IWAI and Makoto IROBE
College of Science and Technology,
Nihon University

On the assumption of a homogeneous and isotropic half space viscoelastic solution of wave equation is derived from the elastic solution by using the elastic-viscoelastic correspondence principle. This investigation is performed with the aim of finding the simple and effective way to determine the dynamic properties of soil and soft rock grounds by measuring of surface wave propagation.