

(58) 境界要素法による地中構造物の過渡応答解析

○ 山口大学工学部 正会員 三浦 房紀
 山口大学工学部 学生会員 丸山 昭義
 福井大学工学部 正会員 福井 卓雄
 山口大学工学部 正会員 中川 浩二

1. まえがき

近年、トンネル等の地中構造物は、長大化、近接化する傾向にあり、これら構造物の静的、動的挙動および安全性の的確な把握がますます重要となってきた。一般に、振動解析においては、汎用性に富む有限要素法が頻繁に用いられているが、この種の問題においては、非常に広範囲な領域をその解析の対象とするため、境界条件等の困難な問題が生じてくる。しかしながら、境界要素法を用いれば、無限領域、あるいは半無限領域の Green 関数を用いるので、この種の問題は克服でき、有効な解析手法となることが期待できる。境界要素法による解析には、周波数領域および時間領域によるものがある。前者においては、一般に取り扱いが容易なことから広く用いられているが、過渡現象の解析、あるいは将来、非線形問題を取り扱うには、時間領域による解析が適している。

そこで、本研究では、まず時間領域での境界要素法の定式化を行い、この種の問題への適用性を示す。次に、解の精度の検討を行ったのち、理想化したモデルを例にとり、動的応答特性に関して考察を行う。

2. 解析手法

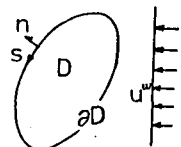
2.1 境界積分方程式

2次元弾性問題における境界積分方程式¹⁾は、Love の公式に境界周方向の長さ s (図-1 参照)を導入して変数変換することにより得られ、次式のように表せる。

$$C_{ij}(y) u_i(y, t) = u_i^*(y, t) + \int_0^t \int_{\partial D} \{ L_{ij}(y; x, \tau) t_i(x, t-\tau) - T_{ij}(y; x, \tau) u_i(x, t-\tau) - S_{ij}(y; x, \tau) \dot{u}_i(x, t-\tau) \} ds d\tau \quad (1)$$

ここで、 $u_i(y, t)$, $\dot{u}_i(y, t)$, $t_i(y, t)$ は、それぞれ x 点に力を受けた場合の y 点の時刻 t における i 方向の変位、速度、Traction を表しており、 $C_{ij}(y)$ は、滑らかな境界 ∂D をもつ領域 D について

$$C_{ij}(y) = \begin{cases} \delta_{ij} & y \in D \\ \delta_{ij}/2 & y \in \partial D \\ 0 & y \in D + \partial D \end{cases} \quad (2)$$



である。ただし、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。

図-1 領域と記号の定義

また、 $U_{ij}(y; x, \tau)$, $T_{ij}(y; x, \tau)$, $S_{ij}(y; x, \tau)$ は、Green 関数であり、それぞれ、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} 4\pi\rho L_{ij}(y; x, \tau) &= 2\left\{ \beta \frac{\eta_i \eta_j}{\eta^2} \left\{ \left(\tau^2 - \frac{\eta^2}{c^2} \right)^{3/2} - \frac{1}{3} \tau^3 \left(\tau^2 - \frac{\eta^2}{c^2} \right)^{3/2} \right\} - \frac{\delta_{ij}}{\eta^2} \left(\tau^2 - \frac{\eta^2}{c^2} \right)^{3/2} \right\} \\ &\quad - 2\left\{ \beta \frac{\eta_i \eta_j}{\eta^2} \left\{ \left(\tau^2 - \frac{\eta^2}{c^2} \right)^{3/2} - \frac{1}{3} \tau^3 \left(\tau^2 - \frac{\eta^2}{c^2} \right)^{3/2} \right\} - \frac{\delta_{ij}}{\eta^2} \left(\tau^2 - \frac{\eta^2}{c^2} \right)^{3/2} \right\} \\ &\quad + \frac{2}{c^2} \frac{\eta_i \eta_j}{c^2 \tau^2} \left(\tau^2 - \frac{\eta^2}{c^2} \right)^{3/2} + \frac{2}{c^2} \left(-\frac{\eta_i \eta_j}{c^2 \tau^2} + \delta_{ij} \right) \left(\tau^2 - \frac{\eta^2}{c^2} \right)^{3/2} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
4\pi T_{ij}(y; x, \tau) = & -12 C_2^2 \left\{ \frac{5\eta_i \eta_j \eta_A \eta_B}{\eta^2} \left\{ (\tau^2 - \frac{\eta^2}{C_1^2})^{1/2} - \frac{2}{3} \frac{1}{\tau^2} (\tau^2 - \frac{\eta^2}{C_1^2})^{3/2} + \frac{1}{3} \frac{1}{\tau^4} (\tau^2 - \frac{\eta^2}{C_1^2})^{5/2} \right\} \right. \\
& - \left. \left(\frac{\eta_i \eta_j + \delta_{ij} \eta_A \eta_B + \eta_i \eta_j}{\eta^2} \right) \left\{ (\tau^2 - \frac{\eta^2}{C_1^2})^{1/2} - \frac{1}{3} \frac{1}{\tau^2} (\tau^2 - \frac{\eta^2}{C_1^2})^{3/2} \right\} \right\} \\
& + 12 C_2^2 \left\{ \frac{5\eta_i \eta_j \eta_A \eta_B}{\eta^2} \left\{ (\tau^2 - \frac{\eta^2}{C_1^2})^{1/2} - \frac{2}{3} \frac{1}{\tau^2} (\tau^2 - \frac{\eta^2}{C_1^2})^{3/2} + \frac{1}{3} \frac{1}{\tau^4} (\tau^2 - \frac{\eta^2}{C_1^2})^{5/2} \right\} \right. \\
& - \left. \left(\frac{\eta_i \eta_j + \delta_{ij} \eta_A \eta_B + \eta_i \eta_j}{\eta^2} \right) \left\{ (\tau^2 - \frac{\eta^2}{C_1^2})^{1/2} - \frac{1}{3} \frac{1}{\tau^2} (\tau^2 - \frac{\eta^2}{C_1^2})^{3/2} \right\} \right\} \\
& + 2 \left\{ -12 \frac{C_2^2}{C_1^2} \frac{\eta_i \eta_j \eta_A \eta_B}{C_1^2 \tau^4} + 2 \frac{C_2^2}{C_1^2} \left(\frac{\delta_{ij} \eta_A \eta_B + \eta_i \eta_j}{C_1^2 \tau^2} \right) - (1 - 4 \frac{C_2^2}{C_1^2}) \frac{\eta_i \eta_j}{C_1^2 \tau^2} \right\} (\tau^2 - \frac{\eta^2}{C_1^2})^{1/2} \\
& + 2 \left\{ 12 \frac{\eta_i \eta_j \eta_A \eta_B}{C_1^4 \tau^4} - 2 \frac{\eta_i \eta_j}{C_1^2 \tau^2} - 3 \left(\frac{\delta_{ij} \eta_A \eta_B + \eta_i \eta_j}{C_1^2 \tau^2} \right) \right\} (\tau^2 - \frac{\eta^2}{C_1^2})^{-1/2} \quad (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4\pi S_{ij}(y; x, \tau) = & \frac{2}{C_1^2} \left\{ -2 \frac{C_2^2}{C_1^2} \frac{\eta_i \eta_j \eta_A \eta_B}{C_1^2 \tau^3} - (1 - 2 \frac{C_2^2}{C_1^2}) \frac{\eta_i \eta_j}{C_1^2 \tau} \right\} (\tau^2 - \frac{\eta^2}{C_1^2})^{1/2} \\
& + \frac{2}{C_1^2} \left\{ 2 \frac{\eta_i \eta_j \eta_A \eta_B}{C_1^2 \tau^3} - \left(\frac{\delta_{ij} \eta_A \eta_B + \eta_i \eta_j}{C_1^2 \tau} \right) \right\} (\tau^2 - \frac{\eta^2}{C_1^2})^{-1/2} \quad (5)
\end{aligned}$$

ここに、 $\eta = |x - y|$ 、 ρ は密度、 C_1, C_2 は、それぞれ縦波、横波の速度、 n は、境界法線方向ベクトルである。ただし、 $(\tau^2 - \eta^2/C^2)$ は、静止した過去の仮定により、1以上で意味をもつ。

2. 2 離散化手法

境界積分方程式(1)を数値計算するためには、これを時間 t と空間 s について離散化する必要がある。図-2のように、時間軸に対しては、時間間隔 Δt で等分割し、境界変位 u_i は、線形関数で(図-2(a))、Tractionは階段関数で近似を行った(図-2(b))。ここで、Tractionは波面の先頭で不連続となり、これを線形近似すると解が不安定となるため、このような近似を行ったものである。²⁾すなわち、

$$\begin{aligned}
u(t - \tau) = & \left\{ -\frac{\tau}{p\Delta t} + \left(\frac{N-K}{p} + 1 \right) \right\} u_K \\
& + q \cdot \left\{ \frac{\tau}{\Delta t} - (N-K) \right\} u_{K-1} \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\dot{u}(t - \tau) = \frac{1}{p\Delta t} u_K - q \cdot \frac{1}{\Delta t} u_{K-1} \quad (7)$$

$$T(t - \tau) = q \cdot T_K \quad (8)$$

ここで、 p, q は、時間区分点と波面入射時刻とのずれを調整するパラメータで、図-2に示された量であり、 $0 \leq p \leq 1$ の値をとり、 q は時刻 $t = (K-1)\Delta t$ で入射波が到達していれば1、そうでなければ0をとるものとする。式(6)、(7)、(8)を式(1)に代入し、時間に関して積分を行えば各時間ステップ $t = N\Delta t$ に対して

$$C_{ij}(y) u_j^N(y) - \int_{\partial\Omega} [A^{NN}(y; x) t_i^N(x) - B^{NN}(y; x) u_i^N(x)] d\Omega = u_j^N(y, N\Delta t) + H_j^N(y) \quad (9)$$

を得る。右辺の $H_j^N(y)$ は、過去の境界変位、境界Tractionの影響による寄与を表しており、

$$H_j^N(y) = \sum_{K=1}^{N-1} \int_{\partial\Omega} [A^{NK}(y; x) t_i^K(x) - B^{NK}(y; x) u_i^K(x)] d\Omega \quad (10)$$

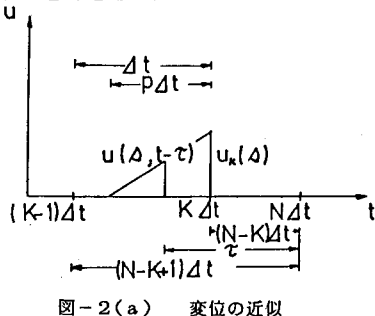


図-2(a) 変位の近似

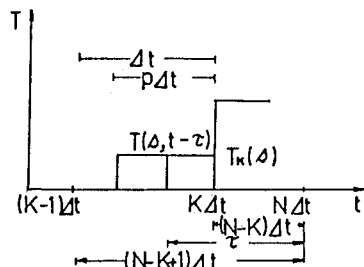


図-2(b) Tractionの近似

である。ここで、 $A^{NK}(x:y)$ 、 $B^{NK}(x:y)$ は、それぞれ $U_{ij}(y:x,\tau)$ 、 $T_{ij}(y:x,\tau)$ 、 $S_{ij}(y:x,\tau)$ を時間 τ について積分し、 t_i 、 u_i についてまとめたものである。

次に、周方向 s については、3次スプライン関数を用いて近似した。3次スプライン関数は、節点において2次微係数が連続であるように接続した区分的3次多項式である。さらに、周方向 s についての積分は、Gauss積分公式を用いた。また、 A^{NN} が対数特異性をもつ部分については、対数Gauss積分公式を用いた。³⁾

境界を M 個に分割して離散化した境界積分方程式(9)をマトリックス表示すると次式のようなになる。

$$-[A]\{t\} + [B]\{u\} = \{u^w\} + \{H\} \quad (11)$$

3. 数値解析例および解の安定性

3.1 中空モデル

まず解の精度を検証するために解析解の求められている図-3に示すような半径 a の円形空洞が存在する領域について解析を行った。このモデルの場合、積分方程式は境界条件として境界Traction $T_i = 0$ を、式(11)に代入することにより次式のようなになる。

$$[B]\{u\} = \{u^w\} + \{H\} \quad (12)$$

入射波としては、次の2種類の波を考えた。

(1) 応力ステップ波

$$u_i^w(x,t) = \frac{\tau_0}{\rho C_1} (C_1 t + x_1) H(C_1 t + x_1)$$

(2) SIN波

$$u_i^w(x,t) = u_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (C_1 t + x_1) H(C_1 t + x_1)$$

ここに、 τ_0 ：縦波入射波の最大主応力、 u_0 ：入射波の変位振幅、 λ ：波長、 $H(x)$ ：ヘビサイドのステップ関数である。

時間は入射波が円孔を通過する時間 $T_0 = 2a/C_1$ を基本単位として無次元表示することにする。

図-4、5は、入射波(1)、(2)が入射した場合の変位を示している。図-4の結果は、Baronの解とよく一致しており、本解析法の有効性ならびに妥当性が確認された。しかし、分割数 M 、時間幅 Δt をそれぞれ変えて解析した結果、解が不安定となる領域が現れる。その領域を調べ、結果を図-6に×印で示した。一般には、領域分割数を多く、時間分割幅を小さくすればとるほど正しく波形を評価できると考えられるが、解析を行った結果、領域分割数については大きいほど正しい値が得られるが、一方の時間分割幅についてはこのようなことは成り立たなくなっている。すなわち、 Δt がある程度小さくなると解が不安定となる。これは、本研究ではGauss積分を用いているため、同じ分割数でも時間分割幅 Δt を小さくすることは、それだけ影響してくる領域の情報量が減ることとなるためと考えられる。このこと

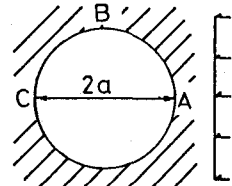


図-3 中空モデル

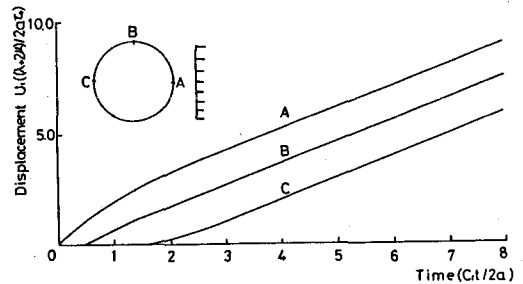


図-4 境界変位(応力ステップ波 16分割 $\Delta t = 0.5$)

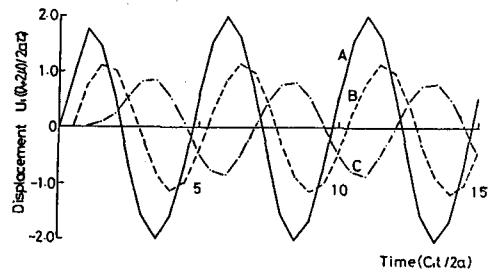


図-5 境界変位(SIN波 16分割 $\Delta t = 0.5$ $l = 10a$)

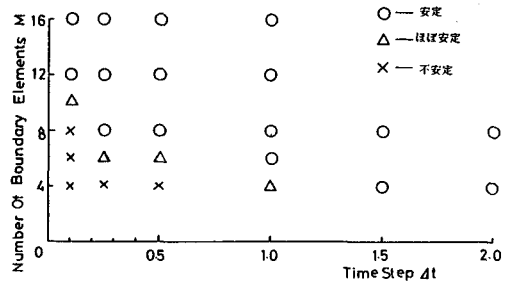


図-6 分割数 M と時間幅 Δt による解の安定性

は、SIN波についても同様のことが言え、正しく評価できるSIN波の振動数 f の限界値が次式で与えられる。

$$f \leq \frac{V_p}{n \cdot \Delta T \cdot 2a} \quad (13)$$

ここに、 n ：1波長を評価するのに必要なステップ数、 V_p ：縦波速度、 ΔT ：解析する分割数において安定となるための時間幅（図-6より求める）。

3.2 中実モデル

次に、図-7に示すように半径 a の境界が存在する領域について解析を行った。このモデルにおいては、領域 Ω_1 、 Ω_2 それぞれに対して式(11)が得られ、さらに、境界条件 $U_1 = U_2$ 、 $T_1 + T_2 = 0$ を用いて整理してマトリックス表示すると次のようになる。

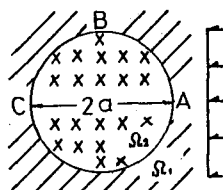


図-7 中実モデル

$$\begin{Bmatrix} B & -A \\ B & A \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u^w \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

まず、 Ω_1 、 Ω_2 共に同じ物質とし、応力ステップ波を入射したときの変位を示したのが図-8であるが、理論値と比較した結果、全くの一致を示している。一方、Tractionを示したのが図-9であるが、最初の数ステップは、不安定なものの、すぐ後には、一致してきていることがわかる。また、図-10は、 Ω_2 の縦波速度を Ω_1 の1000分の1にしてSIN波を入射したときの結果を示したものである。この場合には、ほぼ中空モデルとして考えることができ、解析結果は、中空モデルの結果とよく一致している。

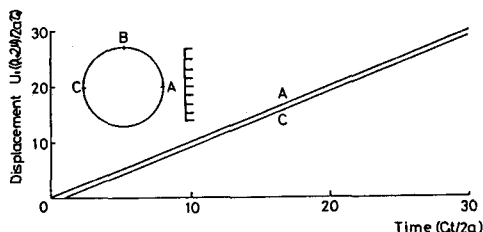


図-8 境界変位(応力ステップ波 8分割 $\Delta t = 2.0$)

4. まとめ

時間領域での境界要素法を用いて解析を行った結果、得られた答は、解析解と良い一致を示しており、妥当なものであることがわかった。しかし、高い振動数に対しては、解が不安定となる。今後は、高い振動数に対しての解析が可能となるように、境界量の近似をさらに工夫する必要がある。

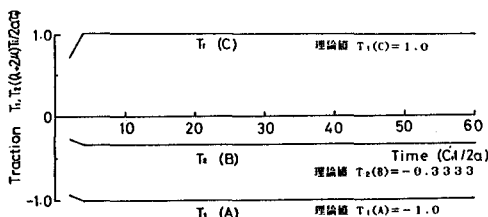


図-9 境界Traction(応力ステップ波 8分割 $\Delta t = 2.0$)

参考文献

- 1 藤木広一：積分方程式による地下空洞周辺の過渡応答の解析：京都大学修士論文 1980.
- 2 福井卓夫：非均質弾性体の過渡応答の境界積分方程式による時間ステップ解析：境界要素法論文集第2巻 1985.
- 3 丸山昭義：時間領域における境界要素法を用いた地中構造物の振動解析：山口大学修士論文 1986.

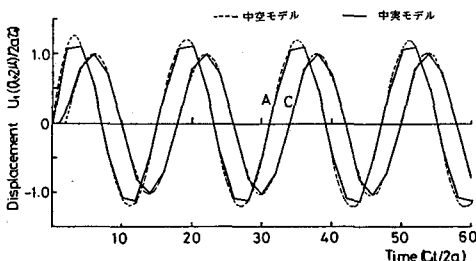


図-10 境界変位(SIN波 8分割 $\Delta t = 2.0$ $l = 32a$)

(58) TRANSIENT VIBRATION ANALYSES OF UNDERGROUND STRUCTURES
BY THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

by

F.Miura^{*}, M.Maruyama^{*}, T.Fukui^{**} and K.Nakagawa^{*}

This paper is concerned with the applicability of the boundary element method in time domain to transient vibration analyses of underground structures. The time marching scheme of the boundary element method is briefly given first. Then, two idealized models are employed to investigate the accuracy of the scheme.

First model is an elastic full space with a circular cavity. The displacements obtained from the numerical technique showed good agreement with Barron's analytical solution. Second model consists of two different materials, i.e. an elastic full space with a circular shaped different medium zone. The displacements and tractions on the boundary of the two materials are investigated when the model is subjected to (i) the stress step wave and (ii) sinusoidal wave.

The validity of this method was shown and at the same time, limits of the applicability was also clarified.

* Yamaguchi University, ** Fukui University