

1. はじめに

流れ則を用いた弾塑性理論では、構成則は降伏関数、塑性ポテンシャルを仮定した流れ則、硬化則の3つの基本概念から誘導される。岩質材料の構成則を考える場合は、せん断応力の作用により体積変化が生じるということ、および降伏条件が等方応力の影響を受けるということの2つの特性をいかに導入するかがキーポイントとなる。

しかし、市川¹⁾は応力と塑性ひずみの応答関数を実験値から直接求めることにより、弾塑性構成則を誘導している。この応答関数は、応力の降伏判定に用いられるため、ベクトル型の降伏関数とみることができる。

本研究では、大谷石でベクトル型の降伏関数を決定し、硬化パラメータを用いて降伏曲面を表したとき、どのような型をしているかを調べ、従来の降伏関数を用いた場合の降伏曲面との相違点について考察を行った。

2. ベクトル型降伏関数

材料が等方であれば、力学応答は座標系のとり方によらず一定であるので、応力は主応力を用いて表現される。いま一般座標系の基底ベクトルを $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ 、主応力方向に座標系をとったときの基底ベクトルを $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3$ 、主応力を $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ とすれば、応力テンソルは

$$\underline{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \sigma_1 \underline{e}'_1 \otimes \underline{e}'_1 + \sigma_2 \underline{e}'_2 \otimes \underline{e}'_2 + \sigma_3 \underline{e}'_3 \otimes \underline{e}'_3 \quad \dots\dots\dots (1)$$

と表現できる。ここで、主応力空間の基底ベクトルを

$$\underline{g}_i = \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i \quad \text{とおけば、}$$

$$\underline{\sigma} = \sigma_1 \underline{g}_1 + \sigma_2 \underline{g}_2 + \sigma_3 \underline{g}_3 \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる。さらに(2)は等方応力成分 $\bar{\sigma}$ と偏差応力成分 $\underline{S}$ に分解できる。

$$\underline{\sigma} = \bar{\sigma} + \underline{S} = \bar{\sigma} \underline{n} + \underline{S} \underline{m} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) (\underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\underline{S} = \underline{\sigma} - \bar{\sigma} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\bar{\sigma} = \|\underline{\sigma}\|, \quad \underline{S} = \|\underline{S}\| \quad \dots\dots\dots (6)$$

ただし、 $\underline{n}, \underline{m}$ は $\bar{\sigma}$ および $\underline{S}$ の基底ベクトルである。

いま弾塑性応答が $\underline{S}$ の方向に依存しないとすれば、降伏条件は $\underline{S}$ および $\bar{\sigma}$ を用いて表現されることになる。

塑性ひずみに関しても同様に、

$$\underline{\varepsilon}^p = \bar{\varepsilon}^p + \underline{e}^p = \bar{\varepsilon}^p \underline{n}' + \underline{e}^p \underline{m}' \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\bar{\varepsilon}^p = \frac{1}{3} (\varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p + \varepsilon_3^p) (\underline{g}'_1 + \underline{g}'_2 + \underline{g}'_3) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\underline{e}^p = \underline{\varepsilon}^p - \bar{\varepsilon}^p \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\bar{\varepsilon}^p = \|\bar{\varepsilon}^p\|, \quad \underline{e}^p = \|\underline{e}^p\|$$

であり、 $\underline{g}'_1, \underline{g}'_2, \underline{g}'_3$ は塑性ひずみの主軸の基底ベクトル、 $\underline{n}', \underline{m}'$ は $\bar{\varepsilon}^p$ および $\underline{e}^p$ の基底ベクトルである。

このとき、市川は応力と塑性ひずみの応答関数を

$$S = \Phi(\underline{e}^p, \bar{\varepsilon}^p) \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\sigma = \Psi(\underline{e}^p, \bar{\varepsilon}^p) \quad \dots\dots\dots (11)$$

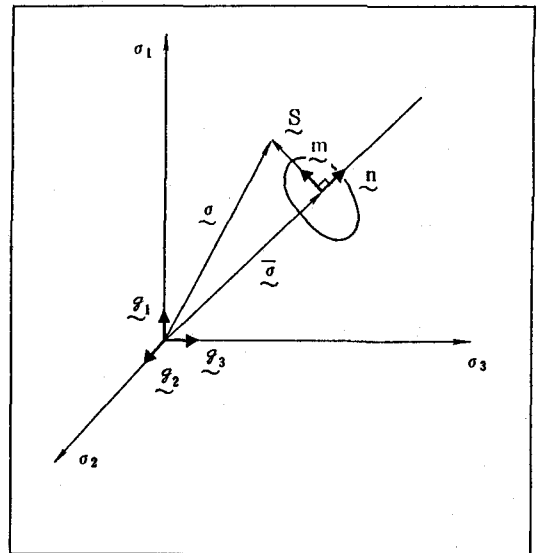


Fig.1 主応力空間での座標系

と作ることにより、増分形における弾塑性構成式を誘導している。これは、

$$f(\underline{\sigma}, \underline{\varepsilon}) = \left\{ \begin{matrix} S - \phi(e^p, \bar{e}^p) \\ \bar{\sigma} - \psi(e^p, \bar{e}^p) \end{matrix} \right\} = 0 \tag{12}$$

と変形でき⁽¹⁾ (12)式から、降伏条件を決定できる。

3. 大谷石への適用

大谷石の慣用三軸試験結果から求めた、応力 (S , $\bar{\sigma}$) と塑性ひずみ (e , $\bar{e}$) の関係を Fig. 2、および Fig. 3 に示す。この結果から偏差応力 S は偏差塑性ひずみに関しては単調増加、体積塑性ひずみに関しては単調減少であり、等方応力 $\bar{\sigma}$ は偏差塑性ひずみに関しては単調増加、体積塑性ひずみに関しては単調減少な関数であることがわかる。

このような関数は、

$$S = \phi(e^p, \bar{e}^p) = \int_0^\infty \int_0^\infty \{ a_1(\omega_1) + a_2(\omega_1) \Lambda(\bar{e}^p / \omega_1) \} \{ a_3(\tau_1) + a_4(\tau_1) \Lambda(e^p / \tau_1) \} d\omega_1 d\tau_1 \tag{13}$$

$$\bar{\sigma} = \psi(e^p, \bar{e}^p) = \int_0^\infty \int_0^\infty \{ b_1(\omega_2) + b_2(\omega_2) \Lambda(\bar{e}^p / \omega_2) \} \{ b_3(\tau_2) + b_4(\tau_2) \Lambda(e^p / \tau_2) \} d\omega_2 d\tau_2 \tag{14}$$

と表現できる。

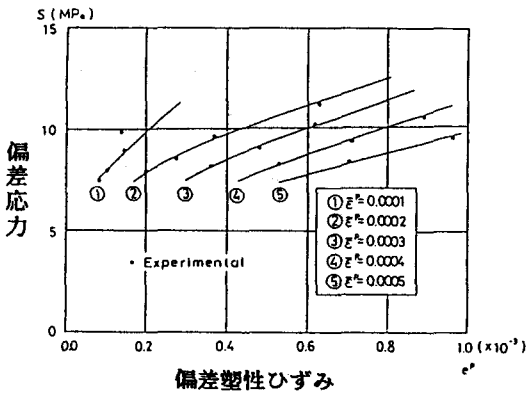


Fig. 2 偏差応力－塑性ひずみ関係の計測値

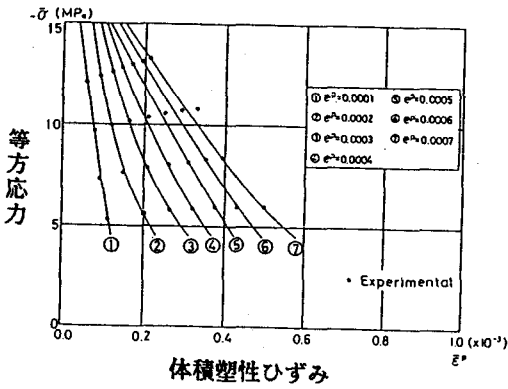


Fig. 3 等方応力－塑性ひずみ関係の計測値

ただし

$$A(x) = 1 - e^{-x}$$

である。

これを離散スペクトル近似し、

$$\begin{aligned} \Phi = & S_0 + \sum_{i=1}^n \phi_1(\omega_{1i}) A(\bar{\epsilon}^P / \omega_{1i}) + \sum_{i=1}^m \phi_2(\tau_{1i}) A(e^P / \tau_{1i}) \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \phi_3(\omega_{1i}, \tau_{1j}) A(\bar{\epsilon}^P / \omega_{1i}) A(e^P / \tau_{1j}) \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi = & \bar{\sigma}_0 + \sum_{i=1}^n \mu_1(\omega_{2i}) A(\bar{\epsilon}^P / \omega_{2i}) + \sum_{i=1}^m \mu_2(\tau_{2i}) A(e^P / \tau_{2i}) \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu_3(\omega_{2i}, \tau_{2j}) A(\bar{\epsilon}^P / \omega_{2i}) A(e^P / \tau_{2j}) \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

となる。ここで、 ω_{1i} および τ_{1i} は S のスペクトルであり、 ω_{2i} および τ_{2i} は、 σ のスペクトルである。このスペクトルを実験値から求め、 ϕ_i および μ_i を最小二乗法で求めることにより S および σ の近似式を求めることができる。

大谷石に関しては以下のように決定された。近似した結果を Fig. 4、5 に示す。

$$\begin{aligned} \phi = & S_0 + a_1 (1 - \exp(-\bar{\epsilon}^P / \omega_1)) + a_2 (1 - \exp(-e^P / \tau_1)) \\ & + a_3 (1 - \exp(-\bar{\epsilon}^P / \omega_1)) (1 - \exp(-e^P / \tau_1)) \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi = & \bar{\sigma}_0 + b_1 (1 - \exp(-e^P / \tau_2)) + b_2 (1 - \exp(-\bar{\epsilon}^P / \omega_2)) \\ & + b_3 (1 - \exp(-e^P / \tau_2)) (1 - \exp(-\bar{\epsilon}^P / \omega_2)) \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

ただし、 $S_0 = 7.40$ 、 $a_1 = -0.5885$ 、 $a_2 = 15.244$ 、 $a_3 = -1.0547$ (MPa)

$\bar{\sigma}_0 = -5.344$ 、 $b_1 = -4.5639$ 、 $b_2 = 4.144$ 、 $b_3 = 3.6396$ (MPa)

$\omega_1 = 0.0002$ 、 $\tau_1 = 0.001$ 、 $\omega_2 = 0.0002$ 、 $\tau_2 = 0.001$

である。

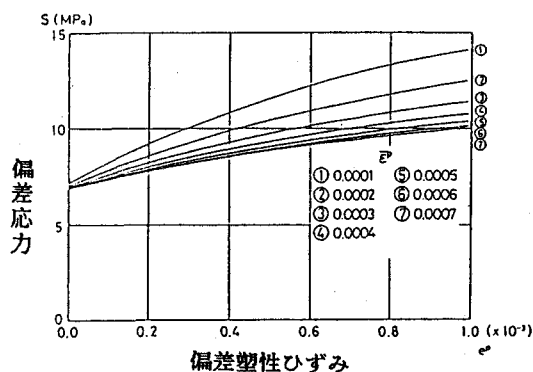


Fig. 4 偏差応力-塑性ひずみ関係の近似値

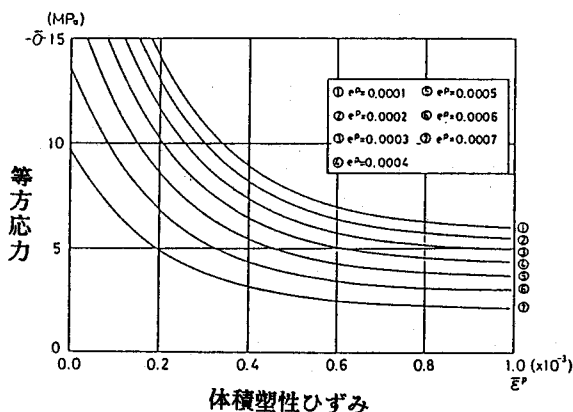


Fig. 5 等方応力-塑性ひずみ関係の近似値

4. 降伏曲面

応力空間における降伏曲面は、従来の降伏関数を用いて表現すれば、

$$f(\underline{g}, k) = 0 \quad (19)$$

としたとき、硬化パラメータの値を一定値にしたとき、(19)式を満足する応力値によって決定される。

ここで硬化パラメータを

$$k = k(\underline{\varepsilon}^P) = (\underline{\varepsilon}^P \cdot \underline{\varepsilon}^P)^{1/2} \quad (20)$$

とした。

$k = \text{const.}$ の条件のもとで、 $\underline{e}^P$ と $\bar{e}^P$ の関係を数値的に求め、それを(17)、(19)式に代入することにより、 $k = \text{const.}$ のときの S と σ の関係を求め、それを Fig. 6 に示す。

5. おわりに

Fig. 6 に示された、ベクトル型降伏関数から決められる降伏曲面について以下のことがわかった。

- ① 降伏曲面が非線形である。
- ② 硬化パラメータを変化させることにより降伏曲面の形状が変化している。

これから、結論として、ベクトル型降伏関数を用いた場合、降伏曲面の形を考慮しなくても実際の降伏曲面を表現できることがわかった。さらに、従来の降伏関数を用いた場合、初期降伏曲面と後続降伏曲面で関数の型が一定となるが、ベクトル型降伏関数は硬化パラメータの変化による降伏曲面の形状の変化を描写できることがわかった。

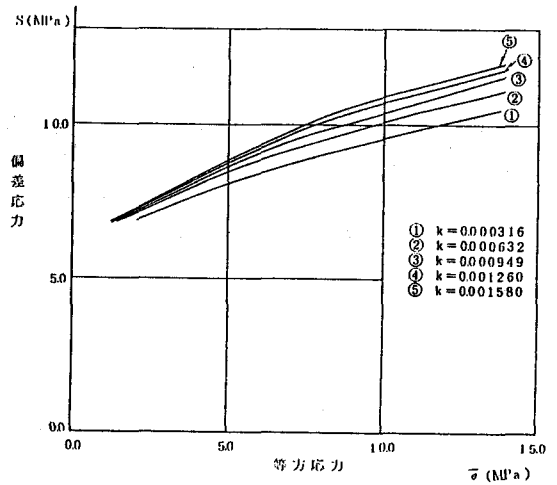


Fig. 6. 降 伏 曲 面

参考文献

- 1) Ichikawa, Y., Kyoya, T. and kawamoto, T: "Incremental Theory of Plasticity for Rock", Proc. 5th. Int. conf. Num. Meth. Geomech., Nagoya(1985)
- 2) 山本三三三:「材料科学のための物体の変形学」, 誠文堂(1979)
- 3) 鶴原 敬久: "岩質材料の異方破壊挙動に関する基礎的研究", 土木学会第40回年次学術講演会概要集

(41) Consideration on the yield surface by vector type yield function

Takahisa TSURUHARA

Abstract

Concerning to the elasto-plastic behaviour of Rocks, it is necessary to obtain the yield function. Assuming the materials to be isotropic, stress invariant should be used for the parameters of the yield function obtained by yield surface of the materials.

There are representative type of functions, such as Drucker-Prager type, Von-Mises type, Lade-Duncan type, etc.

Ichikawa proposes vector type yield function which constitutes the relationship between stress and plastic strain without consideration for yield surface.

The author proposes the characteristic feature on the yield surface calculated from the vector type yield function, of which the results are obtained by laboratory conventional triaxial testings for OYA TUFF.

As a result, the change of yield surfaces considering the differences of strain level can be obtained in the vector type yield function, on the contrary the yield function based on the subsequent yield surface may be accord to the one based on the initial yield surface for the above mentioned yield functions.