

琉球大学工学部 ○ 渡嘉敷直彦

名古屋大学工学部 京谷 孝史

名古屋大学工学部 市川 康明

名古屋大学工学部 川本 脩万

1. はじめに

土や岩のような内部摩擦性材料は、せん断応力の作用により体積変化が生じる。このような材料の塑性挙動の記述に関連流れ則を適用すると、ダイレタンシー特性を過大に評価することが知られている。Rudniki⁽¹⁾らは、体積塑性ひずみ増分と偏差塑性ひずみ増分の比として定義されるダイレタンシー関数を導入して摩擦性材料の構成則を提案している。京谷⁽²⁾らは、Rudnikiらの構成則が等方ひずみ効果を仮定したDrucker-Prager型の降伏関数と結びつけられていることを明らかにし、ダイレタンシー関数を用いる方法が非関連流れ則を導くことを示している。安田⁽³⁾らは、ダイレタンシー関数を用いた非関連流れ則を大谷石の力学挙動へ適用している。

本研究は、このダイレタンシー関数を用いた塑性流れ理論が泥岩の塑性挙動に対しても有用であると考え、実験結果に基づきその弾塑性構成式について検討を行う。次に提案された構成式に基づいて有限要素法による圧縮試験のシミュレーションを行い、その妥当性を検討する。また、実験結果より硬化関数とダイレタンシー関数の決定するに際し、ラプラス変換の離散スペクトル解析の手法を用い容易にその関数形が得られることを示す。なお、構成式の誘導にあたっては、ひずみ硬化域を対象とし、材料の等方硬化則と硬化パラメータとしてひずみ硬化則を仮定する。

2. ダイレタンシー関数を用いた弾塑性構成式

図-1に示すように、各拘束圧に対する初期降伏点およびピーク強度点の直線関係の平行移動を仮定することができれば、降伏関数はDrucker-Prager型の次式で与えられる。

$$f = \alpha \bar{\sigma} + s - K (\bar{\epsilon}^P) = 0 \quad (1)$$

ここで、 α :定数、 $\bar{\sigma} = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$:等方応力、 $s = \|\bar{s}\| = (\bar{s} \cdot \bar{s})^{1/2}$:偏差応力テンソルのノルム、 K :硬化関数、である。

次に、非関連流れ則は塑性ポテンシャル g を仮定すれば、

$$d\bar{\epsilon}^P = \lambda \frac{\partial g}{\partial \bar{\sigma}} \quad (2)$$

与えられる。偏差応力テンソル $\bar{s}$ と等方応力テンソル $\bar{\sigma}$ の直交性 ($\bar{s} \cdot \bar{\sigma} = 0$) を用いると(2)式は次のように表される。

$$d\bar{\epsilon}^P = d\bar{\epsilon}^P + d\bar{\epsilon}^P = \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial s} \bar{m} + \frac{1}{3} \frac{\partial g}{\partial \bar{\sigma}} \bar{I} \right) \quad (3)$$

ここで、 $d\bar{\epsilon}^P$:偏差塑性ひずみテンソル増分、 $d\bar{\epsilon}^P$:体積塑性ひずみテンソル増分、 $\bar{m} = s/\bar{s}$ 、 $\bar{I}$:単位テンソル、である。 $d\bar{\epsilon}^P$ と $\bar{s}$ 、 $d\bar{\epsilon}^P$ と $\bar{\sigma}$ がそれぞれ共軸性を有すると仮定すると、(3)式より

$$\left. \begin{aligned} d\bar{\epsilon}^P &= \lambda \frac{\partial g}{\partial s} \bar{m} \\ d\bar{\epsilon}^P &= \frac{1}{3} \lambda \frac{\partial g}{\partial \bar{\sigma}} \bar{I} \end{aligned} \right\} \quad (4a, b)$$

と分離できる。ここで、ダイレタンシー関数 β を体積塑性ひずみ増分と偏差塑性ひずみ増分のノルムの比として、次式のように定義する。

$$\beta = \frac{d\bar{\epsilon}^P}{d\bar{\epsilon}^P} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{\sigma}} / \frac{\partial g}{\partial s} \right) \quad (5)$$

(5)式のダイレタンシー関数 β を(3)式の非関連流れ則へ導入すると、次のように表される。

$$d\bar{\epsilon}^P = \lambda \frac{\partial g}{\partial s} (\bar{m} + \beta \bar{I}) \quad (6)$$

次に、係数 λ は、後続の降伏曲面に関する Prager の適合条件 $df = 0$ を適用して次のように与えられる。いま、(1) 式の降伏条件と、硬化パラメータとしてひずみ硬化則

$$K(\bar{\epsilon}^P) = K(e^P, \bar{\epsilon}^P) \quad (7)$$

を導入すると、 λ は

$$\lambda = \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \cdot d\bar{\sigma} = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \bar{m} + \frac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \bar{I} \right) \cdot d\bar{\sigma} \quad (8)$$

となる。ここで、 h は次式で与えられる。

$$h = \frac{\partial g}{\partial \bar{\sigma}} \left(\frac{\partial K}{\partial e^P} + \beta \frac{\partial K}{\partial \bar{\epsilon}^P} \right) = H \frac{\partial g}{\partial \bar{\sigma}} \quad (9)$$

以上、応力およびひずみに関する直交成分とダイレタンス係数 β を用いると、弾塑性構成式は次のように与えられる。

$$d\bar{\sigma} = \left[\bar{D} - \frac{\bar{D} (\bar{m} + \beta \bar{I})}{H + \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \cdot \bar{D} (\bar{m} + \beta \bar{I})} \right] d\bar{\epsilon} \quad (10)$$

ここで、 $H = \left(\frac{\partial K}{\partial e^P} + \beta \frac{\partial K}{\partial \bar{\epsilon}^P} \right)$, $\bar{D}$: 弾性マトリックス, である。

3. 泥岩の三軸圧縮試験と材料定数の決定

岩質材料の塑性挙動を表すために提案された構成式の泥岩への適用性を検討するため、通常の三軸圧縮試験および一軸圧縮試験を行い、実験結果に対する構成式のパラメータを決定する。ここで決定すべきパラメータは、降伏条件式における α 、硬化関数 K 、およびダイレタンス関数 β である。硬化関数 K およびダイレタンス関数 β の関数形は、離散スペクトル解析により決定される。

3.1 実験結果

一軸圧縮試験および三軸圧縮試験に用いた試料は、第三紀堆積の島尻層泥岩であり、その物理定数を表-1に示す。供試体は直径5cm、高さ10cmの円柱供試体を用いた。三軸圧縮試験は、拘束圧一定の非排水圧縮試験を行った。体積ひずみは、供試体の側面に装着した3個のリングゲージによる側方変位より算出した。

表-1 材料の物理定数

初期間隙比 e_0	0.566
初期含水比 W_n (%)	20.7
土粒子比重 G_s	2.70
湿潤密度 γ_d (g/cm ³)	2.09
乾燥密度 γ_d (g/cm ³)	1.73

図-1は、各拘束圧に対する初期降伏応力およびピーク応力を、等方応力 $\bar{\sigma}$ と偏差応力 s の座標系にプロットし、その関係を直線近似したものである。これより、対象とした泥岩を等方硬化体とみなし、(1) 式のDruker-Prager型の降伏関数を仮定した。ここで、 α は降伏応力の $s, \bar{\sigma}$ に関する直線近似の傾きであり、最小2乗近似より $\alpha = 0.1543$ が得られた。図-2に、体積塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^P$ 一定の時の応力 $\alpha \bar{\sigma} + s (= K)$ と偏差塑性ひずみ e^P の関係を示す。パラメータ $\bar{\epsilon}^P$ による関係が明確に現れていないため、 $(\alpha \bar{\sigma} + s) - e^P$ 関係を $\bar{\epsilon}^P$ に依存しない単一曲線で与えることにした。ここでは、4次直交多項式を用いて最小2乗近似により関係式を与えた。図-4に、 e^P 一定の時の $\alpha \bar{\sigma} + s$ と $\bar{\epsilon}^P$ の関係を示す。各 $\bar{\epsilon}^P$ に対する $(\alpha \bar{\sigma} + s) - e^P$ 曲線を4次直交多項式により近似している。 e^P と $\bar{\epsilon}^P$ の関係を図-6に示す。ここで、 $e^P - \bar{\epsilon}^P$ 関係が拘束圧に依存する明瞭な結果が得られなかったため、ダイレタンス関数 β を応力に依存しない形で与えることにした。

3.2 硬化関数の決定

後続の降伏関数における硬化関数として(7)式に示

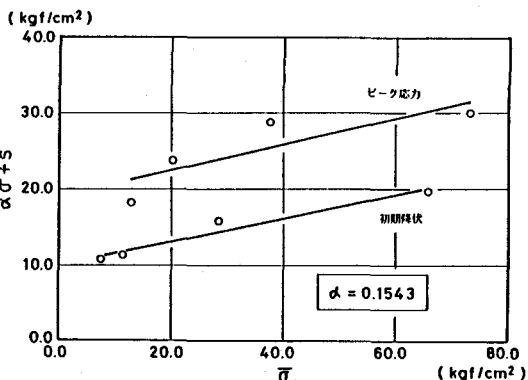


図-1 降伏関数

すびずみ硬化則を仮定し、実験結果よりその関数形をラプラス変換の離散スペクトル理論を適用して次のように決めた。まず、図-2より応力 $\alpha\sigma+s$ は偏差塑性ひずみ e^p に関して単調増加し、図-4の応力 $\alpha\sigma+s$ は体積塑性ひずみ e^p に関して単調減少となるので、硬化関数は

$$K = K_0 + \sum_{i=1}^n \left[a_i \left\{ 1 - \exp(-e^p/\tau_i) \right\} + b_i \exp(-\bar{e}^p/\omega_i) + c_i \left\{ 1 - \exp(-e^p/\tau_i) \right\} \exp(-\bar{e}^p/\omega_i) \right] \quad (11)$$

と表すことができる。ここで、 τ_i および ω_i は離散スペクトルである。図-3は $e^p \frac{\partial K}{\partial e^p}$ と e^p をプロットしたものであり、曲線の大域的なピーク点の e^p がスペクトル値となる。ここでは、1つのピーク点が表れ $\tau=0.0838$ として求めた。同様に図-5に $\bar{e}^p \frac{\partial K}{\partial \bar{e}^p}$ と $\bar{e}^p$ の関係をもとめ、 $\omega=0.0124$ と定めた。したがって、実験結果の硬化関数は第1近似により

$$K = K_0 + a_1 \left\{ 1 - \exp(-e^p/\tau) \right\} + b_1 \exp(-\bar{e}^p/\omega) + c_1 \left\{ 1 - \exp(-e^p/\tau) \right\} \exp(-\bar{e}^p/\omega) \quad (12)$$

で与えられる。ここで係数 K_0 、 a_1 、 b_1 および c_1 は、最小2乗近似より定められる。以上の係数をまとめると $\tau = 0.0838$ 、 $\omega = 0.0124$ 、 $K_0 = 9.9749$ 、 $a_1 = 7.5510$ 、 $b_1 = 0.4094$ 、 $c_1 = 6.7132$ である。したがって、(9)式における H は(12)式とダイレタンシー関数 β より次のように与えられる。

$$H = \frac{a_1}{\tau} \exp(-e^p/\tau) + \frac{a_3}{\tau} \exp(-\bar{e}^p/\omega) \exp(-e^p/\tau) - \frac{\beta}{\omega} \left[a_2 \exp(-\bar{e}^p/\omega) + a_3 \left\{ 1 - \exp(-e^p/\tau) \right\} \exp(-\bar{e}^p/\omega) \right] \quad (13)$$

3.3 ダイレタンシー関数 β の決定

(5)式のように定義されたダイレタンシー関数 β を、図-6の実験結果より次式で与えた。

$$\beta = d_0 + d_1 \exp(-e^p/\gamma) \quad (14)$$

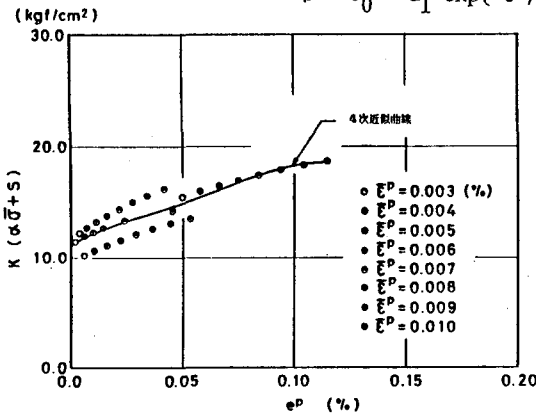


図-2 降伏応力 - 偏差塑性ひずみ

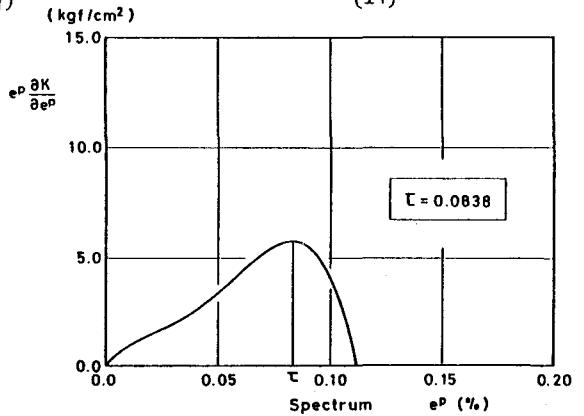


図-3 スペクトル τ

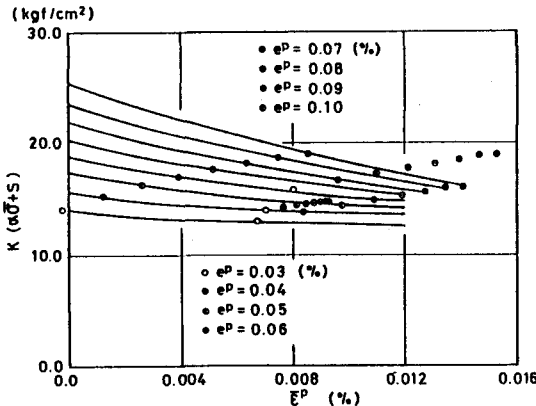


図-4 降伏応力 - 体積塑性ひずみ

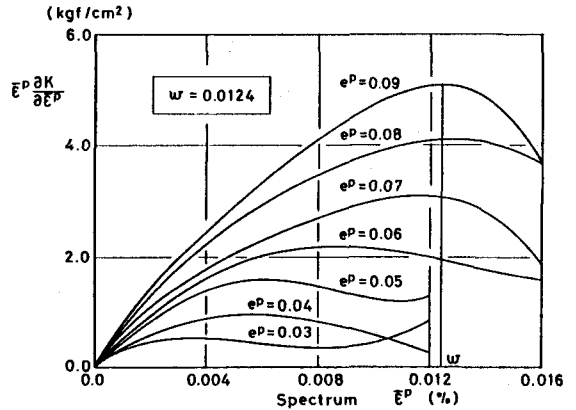


図-5 スペクトル ω

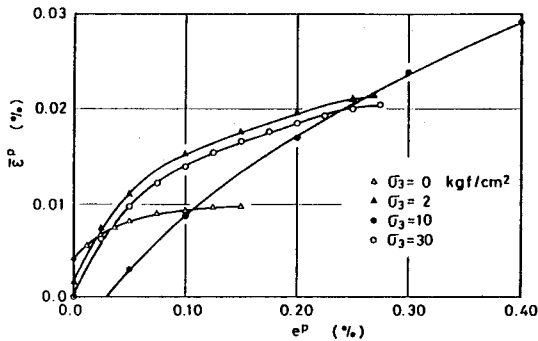


図-6 体積塑性ひずみ-偏差塑性ひずみ

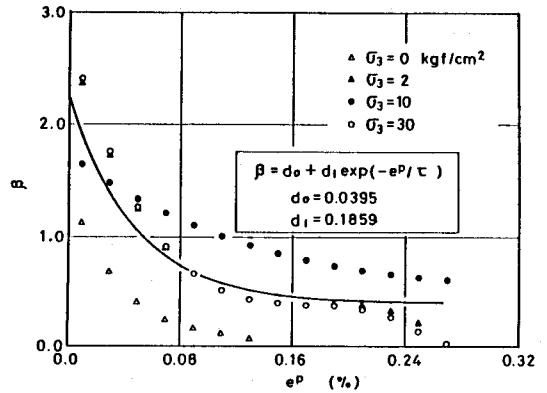


図-7 ダイレタンシー - 偏差塑性ひずみ

すなわち、図-7に示すように β - e^p 関係をプロットし、拘束圧によらない単一曲線で近似した。 $e^p \frac{\partial \beta}{\partial e^p}$ と e^p の関係からスペクトルを $\gamma=0.048$ と定めた。係数 d_0 および d_1 は最小2乗近似より定められ $d_0=0.0395$ 、 $d_1=0.1859$ と求められた。

4. 解析結果と実験結果の比較

提案された弾塑性構成式の有効性を検討するため、一軸圧縮試験に関する有限要素解析を行った。図-8にシミュレーションの結果と実験結果を示す。解析結果は実験結果に傾向が対応している。

5. 結論

ダイレタンシー関数を導入した非関連流れ則による弾塑性構成式の泥岩への適用性について検討を行った。その結果、次の事項が明らかとなった。(1) 提案された弾塑性構成式は、泥岩の塑性挙動を表現するために有効である。また、ダイレタンシー関数を用いることにより、塑性ポテンシャルを陽にさだめることなく非関連流れ則による構成式が得られる。(2) ラプラス変換の離散スペクトル解析の手法は、硬化関数およびダイレタンシー関数を決定する際に非常に有効である。

今回の試験結果から硬化関数の拘束圧に対する依存性およびダイレタンシー関数の応力に対する関係が確認されなかったため、今後実験を重ねこれらの結果を考慮した構成式の検討が必要である。

参考文献

- (1) Rudniki, J.W. and Rice, J.R.: Conditions for the Localization of Deformation in Pressure - Sensitive Dilatant Materials, J.Mech. Phys. Solids, vol.23, 1975, pp.371 - 394.
- (2) 京谷孝史, 尾原祐三, 市川康明, 川本眺万: ダイレタンシー係数を用いた非関連流れ則による弾塑性構成式, 第38回土木学会年次学術講演会, 1983, I- pp. 41 - 42.
- (3) 安田好伸, 京谷孝史, 市川康明, 川本眺万: ダイレタンシー関数を用いた塑性流れ理論とその大谷石への適用, 第39回年次学術講演会, 1984, III- pp. 673 - 674.
- (4) 山本三三三: 材料科学のための物体の変形学, 誠文堂, 1979, pp.150 - 219.

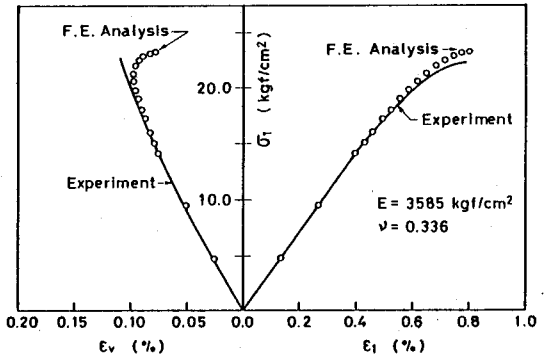


図-8 一軸試験のシミュレーション

(40) An Elasto-plastic Constitutive Equation of Mudstone
by the Flow Theory using Dilatancy Factor

by

N. Tokashiki

(Faculty of Engineering, University of the Ryukyus)

T. Kyoya, Y. Ichikawa and T. Kawamoto

(Dept. of Geotechnical Engineering, Nagoya University)

ABSTRACT

A nonassociated flow theory using dilatancy factor and its application has been proposed by Kyoya et al.(2), and Yasuda et al.(3). In this study, an elasto-plastic constitutive equation of Shimajiri mudstone is presented. Applied flow theory avoids determining the plastic potential by using dilatancy factor. It is noted that the material is assumed to be isotropic throughout and that the yielding function is based on Drucker-Prager type yielding condition.

The dilatancy factor and the hardening function in the constitutive equation are specified from experimental results of Shimajiri mudstone using a method of spectrum approximation of a Laplace transformation. Using the obtained material parameters some experiments of Shimajiri mudstone are simulated by finite element analysis and the numerical results are compared with experimental measurements.

The conclusions are summarized as follows:

- (1) The nonassociated flow theory using dilatancy factor is applied to Shimajiri mudstone.
- (2) The proposed constitutive model is useful to describe the plastic behavior of Shimajiri mudstone.
- (3) A method of spectrum approximation of Laplace transformation is very applicable to specify the material parameters in the constitutive model.