

1 はじめに

トンネルなどの地下空洞掘削時の施工管理においては周辺地山の挙動を把握することが重要である。そのため FEM による数値解析が不可欠となっているが、FEM は入力データの作成に手間がかかり、熟練を要する、高性能のコンピューターを必要とする、計算コストが高いなどの短所を持っており、簡単な解析モデルが設定できる場合でも現場だけではなかなか対応しきれないのが現状である。

そこで、FEM の短所を解決する可能性を持った数値解法として最近注目されている BEM の適用を考え、BEM による掘削解析プログラムを開発した。このプログラムは入力データの作成が極めて容易で、必要な部分のみの集中出力や計算途中の追加出力が可能である。しかも、“架空外力”を未知係数とする間接法に基づいているために解析方法が理解し易くなっている。本文では、この解析方法の概要と解析例について述べる。

2 解析方法

2.1 解析手順

任意の弾性境界値問題を、無限体中の点荷重による応力と変位を重ね合わせて解こうとするもので、無限体中に“架空外力”を分布させ、この外力によって求める状態を作り出す。従って、BEM による解法としては間接法に分類される。

掘削問題を扱うとき、解析手順は次のようになる。

- ① 与えられた境界を空洞のない無限体中に仮想し、これを要素分割する。
- ② 掘削前に掘削予定境界上に生じている応力 σ_i , τ_i を求める。 σ_i , τ_i は要素 i の垂直応力、せん断応力で、FEM の場合は $-\sigma_i$, $-\tau_i$ が掘削相当外力になる。
- ③ 各要素に架空外力 F_{ti}, F_{ni} を分布させる。 F_{ti} は要素 i に平行、 F_{ni} は垂直で、どちらも要素 i の長さ方向に等分布とする。
- ④ 要素 j の架空外力 F_{tj}, F_{nj} によって要素 i に生じる応力 σ_{ij} , τ_{ij} を、基本解を積分して求める。(ある 1 点の集中外力によって無限体中の任意の点に生じる応力と変位は基本解として既に求められている。)
- ⑤ 掘削部を取り除くということは、各要素に $-\sigma_i$, $-\tau_i$ の応力を生じさせることと等価だから、次式を満足するように架空外力を決定する。 $\sum_{j=1}^m \sigma_{ij} = -\sigma_i$ $\sum_{j=1}^m \tau_{ij} = -\tau_i$ (m : 要素数)
- ⑥ 架空外力による応力をすべて重ね合わせ、これに初期応力を加えて、掘削後の応力を求める。
- ⑦ 架空外力による変位をすべて重ね合わせて任意の点の変位を求める。

2.2 基本解

平面ひずみ状態にある無限体中の 1 点 $(0, 0)$ に集中荷重 P, Q (x, y 方向の集中荷重) が作用したとき任意の点 (x, y) に生じる応力 σ_x, τ_{xy} と変位 u, v (x, y 方向の変位) は次式により与えられる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K11 & K12 \\ K21 & K22 \\ K31 & K32 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \dots\dots (1)$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\begin{aligned} K11 &= -x(\beta x^2 + \alpha y^2)/r^4 & K12 &= y(\alpha y^2 + (2\alpha - \beta)x^2)/r^4 \\ K21 &= x(\alpha x^2 + (2\alpha - \beta)y^2)/r^4 & K22 &= -y(\beta y^2 + \alpha x^2)/r^4 \\ K31 &= -y(\beta x^2 + \alpha y^2)/r^4 & K32 &= -x(\beta y^2 + \alpha x^2)/r^4 \end{aligned}$$

$$\alpha = (1-2\nu)/(4\pi(1-\nu)) \quad \beta = (3-2\nu)/(4\pi(1-\nu))$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} L11 & L12 \\ L21 & L22 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \dots\dots (2)$$

$$\begin{aligned} L11 &= a\{b \ln(1/r) + x^2/r^2\} & L12 &= axy/r^2 = L21 \\ L22 &= a\{b \ln(1/r) + y^2/r^2\} & a &= (1+\nu)/(4\pi E(1-\nu)) \end{aligned}$$

E : 弾性係数 ν : ポアソン比 $b = 3-4\nu$

2.3 架空外力の決定

(1) 要素jの架空外力によって要素iに生じる応力 ($i \neq j$)

要素jの両端をE1j, E2j, 中心をCj, X軸となす角を θ_j , 要素iの中心をCiとする。x-y 座標系におけるE1j, E2j, Ciの座標がそれぞれ($x1j, y1j$), ($x2j, y2j$), ($x0i, y0i$) のとき, x-y 座標系の原点を点Ciまで移動させ, さらに座標軸を θ_j だけ回転させると, 新しい座標系におけるこれらの点の座標はそれぞれ($X1, Y0$), ($X2, Y0$), ($0, 0$)となる(図-1, 図-2参照)。

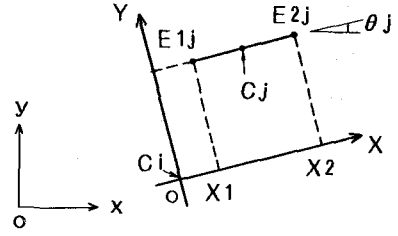


図-1

ただし, $X1 = (x1j - x0i) \cos \theta_j + (y1j - y0i) \sin \theta_j$

$X2 = (x2j - x0i) \cos \theta_j + (y2j - y0i) \sin \theta_j$

$Y0 = -(x1j - x0i) \sin \theta_j + (y1j - y0i) \cos \theta_j$

Ftj, Fnj によって点Ciに生じる応力 $\sigma X, \sigma Y, \tau XY$ は式(1)より次のようになる。

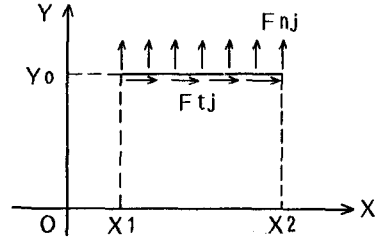


図-2

$$\begin{pmatrix} \sigma X \\ \sigma Y \\ \tau XY \end{pmatrix}_{ij} = \begin{bmatrix} K11 & K12 \\ K21 & K22 \\ K31 & K32 \end{bmatrix}_{ij} \begin{pmatrix} Ftj \\ Fnj \end{pmatrix} \dots (3) \quad r^2 = X^2 + Y_0^2$$

$$K11 = \int_{X1}^{X2} X (\beta X^2 + \alpha Y_0^2) / r^4 dx$$

$$= \beta K1 + (\alpha - \beta) K2 / 2$$

$$K21 = - \int_{X1}^{X2} X (\alpha X^2 + (2\alpha - \beta) Y_0^2) / r^4 dx$$

$$= -\alpha K1 - (\alpha - \beta) K2 / 2$$

$$K31 = \int_{X1}^{X2} Y_0 (\beta X^2 + \alpha Y_0^2) / r^4 dx$$

$$= (\alpha - \beta) K3 / 4 + (\alpha + \beta) K4 / 2$$

$$K12 = - \int_{X1}^{X2} Y_0 (\alpha Y_0^2 + (2\alpha - \beta) X^2) / r^4 dx$$

$$= -(\beta - \alpha) K3 / 4 - (3\alpha - \beta) K4 / 2$$

$$K22 = - \int_{X1}^{X2} Y_0 (\beta Y_0^2 + \alpha X^2) / r^4 dx$$

$$= (\beta - \alpha) K3 / 4 + (\alpha + \beta) K4 / 2$$

$$K32 = \int_{X1}^{X2} X (\beta Y_0^2 + \alpha X^2) / r^4 dx$$

$$= \alpha K1 + (\beta - \alpha) K2 / 2$$

$$K1 = \ln((Y_0^2 + X_2^2) / (Y_0^2 + X_1^2))^{1/2}$$

$$K2 = Y_0^2 / (Y_0^2 + X_1^2) - Y_0^2 / (Y_0^2 + X_2^2)$$

$$K3 = 2 Y_0 X2 / (Y_0^2 + X_2^2) - 2 Y_0 X1 / (Y_0^2 + X_1^2)$$

$$K4 = \theta 2 - \theta 1$$

$$\theta 2 = \tan^{-1} (X2 / |Y_0|)$$

$$\theta 1 = \tan^{-1} (X1 / |Y_0|)$$

($K11, K21, K32$ は $t = X^2 + Y_0^2$, $K12, K22, K31$ は $X = Y_0 \tan \theta$ において積分する。)

従って, 要素jの架空外力によって要素iの中心に生じる応力 $\sigma ij, \tau ij$ は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix}_{ij} = \begin{bmatrix} (1 - \cos 2\phi) / 2 & (1 + \cos 2\phi) / 2 & -\sin 2\phi \\ (\sin 2\phi) / 2 & -(\sin 2\phi) / 2 & -\cos 2\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K11 & K12 \\ K21 & K22 \\ K31 & K32 \end{bmatrix}_{ij} \begin{pmatrix} Ftj \\ Fnj \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G11 & G12 \\ G21 & G22 \end{bmatrix}_{ij} \begin{pmatrix} Ftj \\ Fnj \end{pmatrix} \dots (4)$$

$$\phi = \theta i - \theta j$$

(2) 要素iの架空外力によって要素iに生じる応力

要素中心を原点とし, X軸を要素と平行とすると, 点(0, h)の応力が式(3)で $X1 = -l, X2 = l, Y0 = -h$ とおけば求められるので, 原点の応力 $\sigma X, \sigma Y, \tau XY$ は $h \rightarrow 0$ として次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \sigma X \\ \sigma Y \\ \tau XY \end{pmatrix}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & -\nu / (2(1 - \nu)) \\ 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix}_{ii} \begin{pmatrix} Ft_i \\ Fn_i \end{pmatrix} \dots (5)$$

従って, 要素iの架空外力によって要素iの中心に生じる応力

$\sigma ii, \tau ii$ は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ii} \begin{pmatrix} Ft_i \\ Fn_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G11 & G12 \\ G21 & G22 \end{bmatrix}_{ii} \begin{pmatrix} Ft_i \\ Fn_i \end{pmatrix} \dots (6)$$

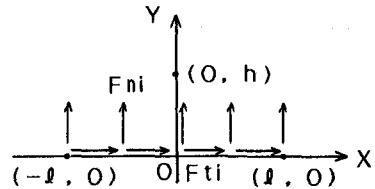


図-3

(3) 架空外力の決定

すべての架空外力によって掘削予定境界上に生じる応力 σ 、 τ は式(4)、(6)より次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [G11] & [G12] \\ [G21] & [G22] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_t \\ F_n \end{pmatrix} \cdots \cdots (7) \quad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2 \cdots \sigma_m)^T \quad F_t = (F_{t1}, F_{t2} \cdots F_{tm})^T \\ \tau = (\tau_1, \tau_2 \cdots \tau_m)^T \quad F_n = (F_{n1}, F_{n2} \cdots F_{nm})^T$$

従って、架空外力は次式を解けば求まる。

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma} \\ \bar{\tau} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [G11] & [G12] \\ [G21] & [G22] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_t \\ F_n \end{pmatrix} \cdots \cdots (8) \quad \bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2 \cdots \bar{\sigma}_m)^T \\ \bar{\tau} = (\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2 \cdots \bar{\tau}_m)^T$$

2. 4 空洞周辺の応力

すべての架空外力による任意の点Sの応力 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_S = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} (1+\cos 2\theta_j)/2 & (1-\cos 2\theta_j)/2 & -\sin 2\theta_j \\ (1-\cos 2\theta_j)/2 & (1+\cos 2\theta_j)/2 & \sin 2\theta_j \\ (\sin 2\theta_j)/2 & -(\sin 2\theta_j)/2 & \cos 2\theta_j \end{bmatrix} [K] s_j \begin{pmatrix} F_{tj} \\ F_{nj} \end{pmatrix} \cdots \cdots (9)$$

ただし、Sが掘削境界上の点で

$$S = Cj \text{ のとき} \quad [K] s_j = \begin{bmatrix} 0 & -\nu/(2(1-\nu)) \\ 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad S \neq Cj \text{ のとき} \quad [K] s_j = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \\ K_{31} & K_{32} \end{bmatrix} s_j$$

Sが掘削境界上の点でないときは、2. 3の(1)と同じ手順で[K]s_jを求める。

2. 5 空洞周辺の変位

2. 3の(1)と同様に座標軸の移動と回転を行なえば(このとき、CiをSとする)、要素jの架空外力による任意の点Sの変位u_x、v_yは式(2)より次のようになる。

$$\begin{pmatrix} u_x \\ v_y \end{pmatrix}_{sj} = \begin{bmatrix} L'_{11} & L'_{12} \\ L'_{21} & L'_{22} \end{bmatrix} s_j \begin{pmatrix} F_{tj} \\ F_{nj} \end{pmatrix} \cdots \cdots (10) \quad L'_{11} = a \int_{x_1}^{x_2} \{ b \ln(1/r) + x^2 / r^2 \} dx \quad L'_{12} = a \int_{x_1}^{x_2} x y_0 / r^2 dx \\ = -abL_1 + a(b+1)L_2 - a(b-1)L_3 = aL_4 \\ L'_{22} = a \int_{x_1}^{x_2} \{ b \ln(1/r) + y_0^2 / r^2 \} dx = L'_{21} \\ = -abL_1 + abL_2 - a(b-1)L_3 \quad r^2 = x^2 + y_0^2$$

$$L_1 = (X_2 \ln(X_2^2 + Y_0^2) - X_1 \ln(X_1^2 + Y_0^2)) / 2 \quad L_2 = X_2 - X_1 \quad L_3 = Y_0 (\theta_2 - \theta_1) \quad L_4 = -\frac{1}{2} Y_0 \ln((Y_0^2 + X_0^2) / (Y_0^2 + X_1^2)) \\ \theta_2 = \tan^{-1}(X_2 / Y_0) \quad \theta_1 = \tan^{-1}(X_1 / Y_0)$$

従って、すべての架空外力による任意の点Sの変位u、vは次のようになる。

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_S = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j \\ \sin \theta_j & \cos \theta_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L'_{11} & L'_{12} \\ L'_{21} & L'_{22} \end{bmatrix} s_j \begin{pmatrix} F_{tj} \\ F_{nj} \end{pmatrix} \cdots \cdots (11)$$

ただし、S=Cjのときは、例えば、 $Y_0 = 10^{-6}$ とすれば良い。

3 解析例

(1) 無限領域一様応力場のトンネル掘削

無限領域一様応力状態にある均一弾性地山を掘削した円形トンネルの周辺の応力と変位について、理論解とBEMによる解及びFEMによる解を比較したのが図-4である。ここでは、トンネルの半径を5m、初期応力は $\sigma_x = \sigma_y = 250$ t/ml、 $\tau_{xy} = 0$ t/ml、地山物性は $E = 700,000$ t/ml、 $\nu = 0.25$ とした。また、BEMとFEMのモデルはx軸とy軸の両方に関して対称(全体系の1/4)で、BEMの要素数は10、FEMの要素は126(節点数は141)とした。

BEMによる解の精度はFEMのそれよりやや良く、照合点にお

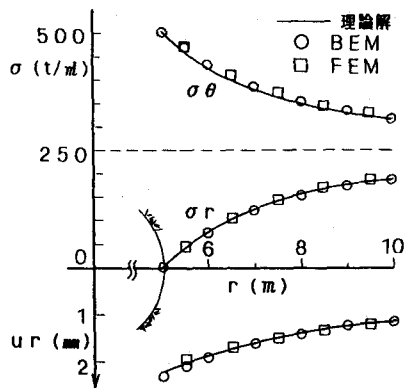


図-4

ける最大誤差は、BEMが応力、変位とも4%、FEMが応力で15%、変位で4%となっている。ただし、応力の誤差は掘削に伴う変化分に対して計算した。

(2) 平面ひずみ状態にある半無限板の応力

平面ひずみ状態にある半無限板に鉛直分布荷重が作用するとき、各点に生じる最大主応力とその方向について、理論解とBEMによる解を比較したのが図-5である。ここでは、分布荷重を 10t/ml 、その作用幅を 10m とした。また、BEMのモデルは X 軸に関して対称(全体系の $1/2$)で、その要素は15とした。

BEMによる解の精度は X の値が大きいほど落ちる傾向にあるが、照合点における最大誤差は、応力で9%、変位で8%となっている。

(3) 地表面の存在が無視できないトンネル掘削

均一弾性地山を掘削した円形トンネルの周辺の応力と地表沈下について、BEMによる解とFEMによる解を比較したのが図-6である。ここでは、トンネルの半径を 3m 、土被りを 12m 、地山物性は $E = 10,000\text{ t/ml}$ 、 $\nu = 0.35$ 、 $\gamma t = 2.0\text{ t/m}^3$ とした。また、両者のモデルは Y 軸に関して対称で、BEMの要素数は22、FEMの要素数は77(節点数は87)とした。なお、FEMのモデルの大きさは幅 18m 、高さ 30m とした(γt :単位体積重量)。

両者による解の差は解析例(1)におけるそれと同程度になっている。ただし、変位については、両者とも不動点を設けて補正した。

(4) 無限斜面の応力

均一弾性地山($\gamma t = 2.0\text{ t/m}^3$)の無限斜面(傾き 45°)における地表面からの距離と応力の関係について、理論解とBEMによる解及びFEMによる解を比較したのが図-7である。ここでは、BEMのモデルの要素数を20、FEMのモデルの形状を直角二等辺三角形、その要素数を110(節点数は121)とした。

無限領域の問題を得意とするBEMの長所が良く出た結果となっている。

4 おわりに

以上より、BEM(間接法)による掘削解析法が弾性境界値問題に対して非常に有力であり、その内容もFEMによるそれと較べて理解し易いことが示せたと思われる。また、最近、BEMの研究は極めて急速に進展しており、材料の非線形性なども考慮できるようになってきたが、本プログラムのレベルアップについては、FEMと較べて利点があると判断される場合にのみ取り組みたいと考えている。

参考文献

- 1) 西谷弘信: 電子計算機による2次元応力問題の解法, 日本機械学会誌, 第70巻, 第580号
- 2) E.Hook, E.T.Brown: 岩盤地下空洞の設計と施工(土木工学社)
- 3) C.A.Brebbia: 境界要素法入門(培風館)

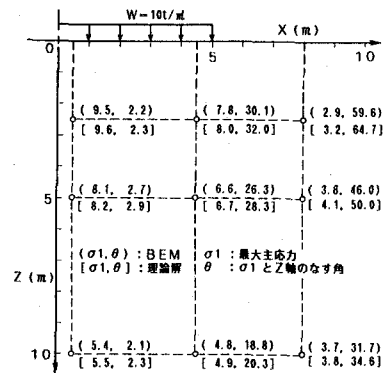


図-5

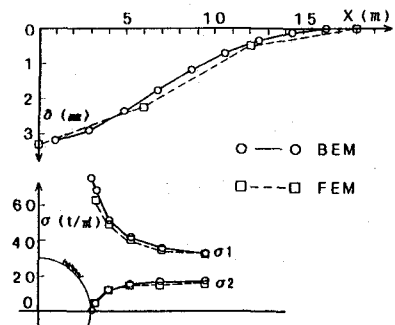


図-6

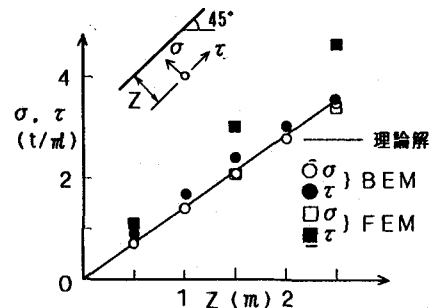


図-7

(2) Analysis of Underground Excavation

by Boundary Element Method

Ytaka Nashimoto

Maeda Construction Co., Ltd.

In underground excavations, it is very important to understand the behaviour of surrounding ground. Numerical analyses by the finite element method(FEM) are normally essential to obtain such behaviour.

But FEM has several disadvantages as follows,

- 1 It costs much labor and requires skill to make input data.
- 2 It requires the high-efficient computer.
- 3 It increases in cost.

Therefore, taking account of the application of the boundary element method(BEM) to excavation problems, which is recently being developed as one of the numerical methods, the analysis program of underground excavations by BEM has been completed.

This program has several advantages as follows,

- 1 It saves labor and does not require skill.
- 2 Only necessary output can be obtained.
- 3 Additional results can be taken during computations.
- 4 Since indirect method which has unknown coefficients of fictitious loads is used, the substance of the analysis can be easily realized.

In this paper, the outline of the analysis is explained, and several numerical examples are presented to verify the validity and availability of BEM solutions by comparison with FEM solutions or analytical solutions.