

(1) 線形弾性地盤における初期応力の同定

(株) 構造計画研究所 正会員 山口 孝

1. はじめに

トンネル掘削における土破りが小さい場合や地表面が傾斜している場合、複雑な地盤変動の履歴を有する場合等においては掘削面上の応力分布を一樣と仮定したり土圧の鉛直成分を γh と仮定する事¹⁾には無理があるように考えられる。特に浅所掘削においては掘削領域内の土重の効果が無視できない事が示されている²⁾が、このような効果は一樣応力分布を仮定する限り表現できない。これらの事から本報告ではトンネル掘削における初期応力が非一樣分布を有する場合について、最近行われている逆解析の手法により同定する事を提案する。

一般に従来行われている解析は解析領域(幾何形状)、力学的或いは幾何学的境界条件、地盤の材料特性等を与えてFEMやBEMにより変位(変形)や応力を求めるものである。これに対してNATM工法などにより現場における計測が盛んに行われるようになり、従来解析結果として得られていたものが直接測できるようになると、逆にこれらのデータから入力データとしていたものを推定しようとする逆解析問題或いは同定問題が注目されるようになり、個々の目的に応じた手法が提案されている。^{3),4)}

本報告で提案するのは2次元FEMに基づくものであり、力学的境界条件及び材料特性の同定を行おうとするものである。

2. 同定問題の定式化

同定問題の定式化には大別して逆定式化法と直接定式化法がある¹⁾が、ここでは前者に基づく定式化を行う。定式化においては桜井・武内⁵⁾の提案した初期応力成分をベクトル成分の外に取り出す手法を拡張解釈し、さらに材料定数(弾性係数及びポアソン比)についてはA.Cividiniら⁶⁾の全体剛性マトリックスから体積弾性係数及び剪断弾性係数を取り出す表現形式を利用した。

線形弾性地盤における釣合方程式は離散化した形で次のように表わされる。

$$\{f\} = [K]\{u\} \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 $\{f\}$: 等価節点外力, $[K]$: 剛性マトリックス, $\{u\}$: 節点変位、である。トンネルの掘削における同定問題としては、一般に $\{u\}$ の一部が測定データとして与えられ、これに基づいて $\{f\}, [K]$ の一部或いは全体を求める事になる。式(1)で $\{u\}$ を測定部分と非測定部分に分け、されにこれに対応させて $\{f\}, [K]$ も分けて記述すると次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \dots \dots \dots (2)$$

さらに $\{f\}, [K]$ については、その中に含まれる未知パラメータを表に出す形で記述すれば次のようになる。

$$[K] = [K_0] + \alpha_i [K_i] \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$\{f\} = \{f_0\} + \beta_j \{f_j\} \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$\text{又は、} \quad [K_{\ell m}] = [K_{\ell m}^0] + \alpha_i [K_{\ell m}^i] \quad \dots \dots \dots (5)$$

$$\{f_{\ell}\} = \{f_{\ell}^0\} + \beta_j \{f_{\ell}^j\} \quad \dots \dots \dots (6)$$

ただし、 $\ell, m=1, 2$ であり、 i, j についてはアインシュタインの総和規約に従う。 $[K_0], \{f_0\}$ はそれぞれ、材質、外力の既知のものについてまとめたものであり、 α_i, β_j は材質、外力の未知パラメータである。式(5), (6)を式(2)に代入して非測定部分 $\{u_1\}$ を消去すると次の方程式が得られる。

$$\{f_0^2\} + \beta_j \{f_j^2\} = [K_{21}][K_{11}]^{-1} \{f_0^1\} + \beta_j [K_{21}][K_{11}]^{-1} \{f_j^1\} - [K_{21}][K_{11}]^{-1}[K_{12}]\{u_2\} + [K_{22}]\{u_2\} \quad \dots \dots (7)$$

これを変形して整理すると次のようになる。

$$\{F\} = [A]\{\xi\} \quad \dots \dots \dots (8)$$

$$\text{ここで、} \{F\} = \{f_0^2\} - [K_{21}][K_{11}]^{-1}\{f_0^1\} + [K_{21}^0][K_{11}]^{-1}[K_{12}]\{u_2\} - [K_{22}^0]\{u_2\} \quad \dots \dots \dots (9)$$

$$[A] = [A_1 \ A_2] \quad \dots \dots \dots (10)$$

$$[A_1] = [K_{22}^1\{u_2\} | \dots] - [K_{21}^1 \ K_{11}^{-1} \ K_{12}\{u_2\} | \dots] \quad \dots \dots \dots (11)$$

$$[A_2] = [K_{21} \ K_{11}^{-1}\{f_j^1\} | \dots] - [\{f_j^2\} | \dots] \quad \dots \dots \dots (12)$$

$$\{\xi\} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \quad \dots \dots \dots (13)$$

ただし、 $[\{x_i\} | \dots]$ は $\{x_i\}$ を横に並べてできる行列を示す。

式(8)は測定データ $\{u_2\}$ 及び既知外力 $\{f_0\}$ から未知パラメータ $\{\xi\}$ が決定される事を示している。ただし、 $[A], \{f\}$ は同時に未知パラメータ $\{\xi\}$ をも含んでいる非線形な方程式である。さらに、式(8)の方程式の数は一般に $\{\xi\}$ の未知パラメータ数以上である。従って $\{\xi\}$ を決定するには次のようなに最小自乗法及びイタレーション⁹⁾の手法を用いる。

- ① まず、 $\{\alpha\}$ の初期値 $\{\alpha_0\}$ に対して $[A], \{f\}$ を計算する。
- ② $\{\xi\} = [A^T A]^{-1} A^T \{F\}$ (最小自乗法) により $\{\xi\}$ を求める。
- ③ 求められた $\{\xi\}$ のうち、 $\{\alpha\}$ に対応する部分を改めて $\{\alpha\}$ とし、①②を $\{\xi\}$ が十分収束するまで繰返す。

式(8)において $\{\xi\}$ に $\{\alpha\}$ が含まれない場合、即ち材料定数がすべて既知の場合は、解はイタレーションを行わずに一意に求められる事は注意すべき点である。

3. 任意の分布形を有する外力の同定について

2で行った定式化において外力ベクトル項は式(4)で $\{f_0\} + \beta_1 \{f_1\}$ と表わされている。このような形は外力が、例えば、 $\{f\} = \langle a_1 a_2 \dots x_1 a_3 \dots x_2 \dots \rangle^T$ (a_i : 既知成分, x_i : 未知成分) とする時

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} + x_1 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix} + x_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{Bmatrix} + \dots \quad \dots \dots \dots (14)$$

とする事によって得られる。しかし、一般には $\{f\}$ の各成分は必ずしも独立である必要はない。例えば $\{f\}$ の各成分 x_i が座標 ξ_j の関数で、 $X = C_0 + C_1 \xi + C_2 \xi^2 + C_3 \xi^3 + \dots$ ($C_j, j=0,1,2,\dots$; 既知) と与えられた時、各 x_i に対する座標 ξ_j が既知として $\{f\}$ は次のように与えられる。

$$\{f\} = C_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} + C_1 \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} + C_2 \begin{Bmatrix} \xi_1^2 \\ \xi_2^2 \\ \vdots \end{Bmatrix} + C_3 \begin{Bmatrix} \xi_1^3 \\ \xi_2^3 \\ \vdots \end{Bmatrix} + \dots \quad \dots \dots \dots (15)$$

式(14)と式(15)を比較した場合、式(14)では外力の各成分が未知パラメータになっており、 $\{f_1\}$ は1成分のみが非ゼロとなっているのに対し、式(15)では外力が既知関数と未知パラメータの積和で表わされる時の未知パラメータが β_j に対応し、 $\{f_1\}$ は非ゼロ成分を複数個含む。さらに $\{f_1\}$ の成分は x を構成する既知関数に応じた従属関係にある。

以上により、外力が任意の分布形を有する場合、その分布形を、適当に選択した既知関数と未知パラメータの積和で近似する事により、その未知外力を同定する事が可能である事が示された。

4. 初期応力の同定

3で示したように初期応力に対しても原理的には任意の分布形を仮定した場合の同定が可能である。しかし、実

用的な観点からは複雑な分布形を仮定しても無意味である。ここでは、非一様分布の最も単純な場合である線形分布を例として定式化を試みる。初期応力の分布は線形を仮定した場合、各応力成分の釣合条件：－

$$\partial \tau_{xy} / \partial x = \partial \sigma_y / \partial y + \gamma \quad (\gamma : \text{地盤の単位重量}) \quad \dots \dots (16)$$

$$\partial \tau_{xy} / \partial y = \partial \sigma_x / \partial x \quad \dots \dots (17)$$

を考慮して次のように7つの未知パラメータを使って表わされる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_7 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots \dots (18)$$

次にこの初期応力を掘削相当力に変換する事を考える。図－1において掘削面上の節点*i*における掘削相当力を求める。節点*i*の両端の節点をそれぞれ*i-1, i+1*として*i-1, i*及び*i, i+1*間の応力を各区間の中心点上の応力で代表させそれぞれ $\sigma_A, \tau_A, \sigma_B, \tau_B$ とする。この時節点*i*の両側の辺に作用する外力は $\sigma_A l_A, \tau_A l_A, \sigma_B l_B, \tau_B l_B$ (l_A, l_B は各辺の長さ)であり、各々の値の1/2が節点*i*に寄与すると考えてこれをxy成分ごとに重畳したものが節点*i*における外力となる。掘削相当力はこの外力に対して符号を反転したものである。従って図－2に示すような力の釣合いを考えて各辺に対応する掘削相当力のx,y成分は次のように表わされる。

$$P_x = -\tau_{xy} \overline{LN} - \sigma_x \overline{NM}, \quad P_y = \tau_{xy} \overline{NM} + \sigma_y \overline{LN} \quad \dots \dots (19)$$

上記に式(18)を代入し、さらに両端の辺の平均をとると次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_{xy}/2 & -d_y/4 & -d_y/2 & 0 & -d_x/4 & 0 & -d_x/2 \\ d_y/4 & 0 & 0 & d_x/4 & d_{xy}/2 & d_x/2 & d_y/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_7 \end{Bmatrix} + \frac{\gamma}{4} \begin{Bmatrix} 0 \\ d_y - d_x - d_{xy} \end{Bmatrix} \quad \dots \dots (20)$$

ここに $d_{xy} = x_2 y_2 - x_1 y_1, \quad d_x^2 = x_2^2 - x_1^2, \quad d_y^2 = y_2^2 - y_1^2, \quad d_x = x_2 - x_1, \quad d_y = y_2 - y_1$
 $(x_1, y_1), (x, y), (x_2, y_2)$ はそれぞれ節点*i-1, i, i+1*の座標である。

一般に掘削面が*n*個の節点から構成される場合、各節点の外力成分の合計は2*n*になり次のように{ η }と関係づけられる。

$$\{F_e\} = [C] \{\eta\} + \{G\} \quad \dots \dots (21)$$

ここで{ F_e }は掘削相当力,[*C*]は掘削面の各節点座標から決定される2*n*×7の係数行列,{*G*}は掘削領域の岩盤重量に関係する項である。式(21)の右辺は次のように書換えられる。

$$\{F_e\} = \eta_j \{C_j\} + \{G\} \quad \text{ここに、} [C] = [\{C_j\} \quad \dots \dots] \quad \dots \dots (22)$$

5. 計算例

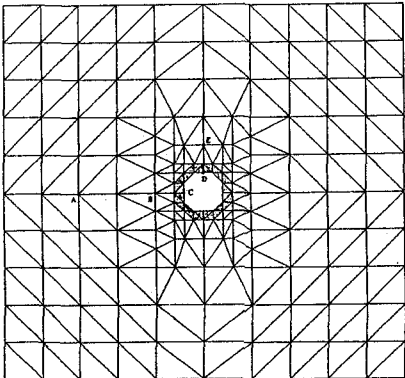
図－3に示すモデルに対し、解析領域外側の節点を固定、内側の掘削面上の節点に表－1に示す初期応力パラメータから計算される掘削相当力を作用させ、表－2に示す材料定数のもとに解析して得られる節点変位の一部を測定データとして採用した。

表－1 初期応力パラメータ

η_1	0.18
η_2	0.03
η_3	34.0
η_4	-0.9
η_5	0.3
η_6	105.0
η_7	29.0

表－2 材料定数

項目	掘削領域 周辺部分	地山部分
弾性係数	1.0×10^5	1.0×10^6
ポアソン比	0.3	0.3
単位重量	1.8	1.8



図－3 解析モデル図

計算はi) 材料定数を既知として初期応力を同定する、ii) 地山部分の弾性係数及び初期応力を同定する、iii) 掘削相当力を既知として与え地山部及び掘削面周辺(覆工材料)の弾性係数を同定する、の3ケースについて行った。i)は測定データの選択によりさらに表-3に示す5ケースを解析した。その結果を表-4に示す。いずれのケースも満足できる結果が得られている。特にケース4では η の精度を除けばx方向のみの測定データから同定できる事になり興味深い。表-5は測定データに誤差(いずれも10%)が含まれる場合についての解析結果を示している。A~Eは誤差を含む測定点及び測定方向を示しており、C,Eはy方向、その他はx方向測定である。解析結果は全体的に定数項(η_3, η_6, η_7)への影響が小さく、係数への影響が大きく出ている。ii)の結果は図-4に示してある。収束速度は小さく正解値の1/2から始めたとしても18回目のイタレーションで0.6までしか収束していない。今後の改良が望まれる。iii)はii)で未知パラメータ数を少くした時収束が速くなる事を期待して行ったが、実際改善されている事がわかる。

表-3 初期応力同定における解析ケース

ケースNo.	測点数	測定データ数	備考(測定方向)
ケース1	1 4	2 2	x方向、y方向、xy同時混在
ケース2	1 8	1 8	x方向、y方向のいずれか
ケース3	1 2	1 2	x方向、y方向のいずれか・掘削面上の点のみ
ケース4	1 2	1 2	x方向のみ
ケース5	6	1 2	すべてxy同時、内点のみ

表-4 初期応力同定における各解析結果

ケースNo.	ケース1	ケース2	ケース3	ケース4	ケース5
η_1	0.180106	0.179982	0.180097	0.180026	0.177922
η_2	0.030479	0.030142	0.029876	0.043560	0.015915
η_3	33.9997	33.9999	33.9998	33.9998	33.9997
η_4	-0.899775	-0.899793	-0.899324	-0.899999	-0.907462
η_5	0.300064	0.300096	0.299880	0.310529	0.302916
η_6	104.999	105.000	104.999	104.999	104.996
η_7	28.9995	28.9998	28.9997	28.9996	29.0004

表-5 誤差を含む測定データによる解析結果の比較

測定点・方向	A	B	C	D	E
η_1 (0.18)	0.176543	0.186392	-0.44043	1.43458	-0.279961
η_2 (0.03)	0.026886	0.031334	-2.46044	1.02716	3.12615
η_3 (34.0)	34.0057	33.9970	34.1898	34.0689	34.9205
η_4 (-0.9)	-0.901040	-0.885110	-2.7828	-0.458796	-4.17109
η_5 (0.3)	0.299431	0.300903	-1.07923	0.360322	3.04923
η_6 (105.0)	104.998	105.000	105.132	105.180	109.79
η_7 (29.0)	28.9989	28.9919	30.0685	28.8248	29.5518

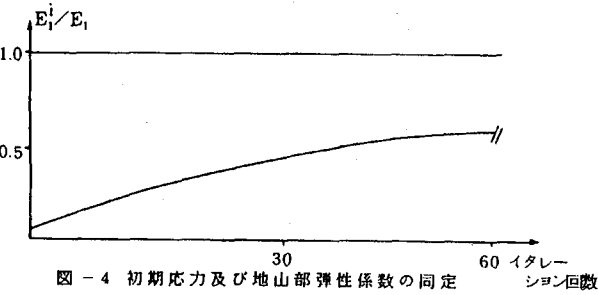


図-4 初期応力及び地山部弾性係数の同定

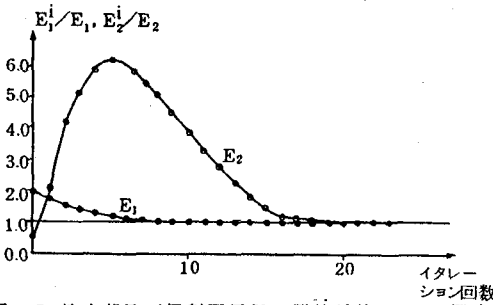


図-5 地山部及び掘削面周辺の弾性係数 E_1, E_2 の同定

6. 結び

本報告においては材料特性(弾性係数,ポアソン比)及び任意分布の初期応力同定に対する定式化を示した。特に、土破りの小さいトンネルの掘削において、初期応力分布を線形に仮定した場合について解析を行い、その有用性を示した。しかし、現場では材料特性を決定する事も必要であり、本報告でもこれを含めた定式化を試みている。これについては収束速度に問題があり、今後の改良が望まれる。

参考文献

- 1) 桜井・竹内: トンネル掘削時における変位計測結果の逆解析法, 土木学会論文報告集第337号, 1983年
- 2) 桜井・地味図・清水: 浅所トンネルの有限要素解析における2,3の問題点, 土木学会第40回次大会, III-191
- 3) 桜井・進士: マイコンによる地下空洞掘削時の安定性の評価, 土木学会論文集第358号/III-3, 1985年
- 4) 大西・東出: 不均質岩盤の弾性定数と幾何学的特性の同定に関する基礎的研究, 土木学会論文集第358号/III-3, 1985年
- 5) A.Cidini et al: Some Aspects of 'Characterization' Problems in Geomechanics, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. Vol.18
- 6) K.T.Kavanagh et al: Finite Element Applications in the Characterization of Elastic Solids, Int. J. Solid Structures, 1971, Vol.7

(1) IN-SITU STRESS IDENTIFICATION PROBLEMS
IN THE LINEAR ELASTIC SOLIDS

Takashi Yamaguchi *

In case of the tunnel excavation under shallow and sloped ground, the effect of gravity or the locality of stress within the excavation area can not be neglected.

The writer has shown that any form of in-situ stress distribution or equivalent nodal force can be identified by the displacements measured in the field without any special sophisticated techniques but that complicated distributions with many unknown parameters are not useful in practical point of view.

In this report in-situ stress identification problems are treated on the assumption of linear distribution in which the number of unknown parameters is reduced from 9 (3 parameters for each stress component) to 7 on the condition of equilibrium. The formulation is made with 2-dimensional plane-stress Finite Element Method.

The method supposed here is tested for some examples. The results are satisfactory for identification of in-situ stress with known material parameters, but there will be a need of improvement for that of both in-situ stress and material property.

* Kozokeikaku Engineering Inc.

Dept. of Civil Engineering, Nakano-ku, Tokyo