(52) 有限要素法・境界要素法の結合解法よる粘弾性解析手法の掘削問題への適用について

佐藤工業（株）中央技術研究所　正会員　○金子典由　篠川俊夫　吉田望
中央大学理工学部　正会員　川原睦人

1．はじめに

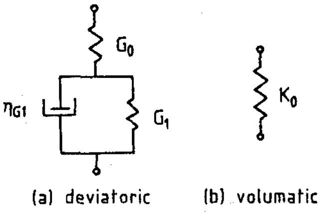
有限要素法（ＦＥＭ）と境界要素法（ＢＥＭ）の結合解法により粘弾性解析を行う。

掘削や支保等を考慮した地盤・岩盤構造物の数値解析を行う際には、掘削に伴う形状や境界条件の変化、地盤材料の非線形挙動や時間依存性挙動の評価、そして地盤の無限の広がりを考慮できることが重要である。地盤工学では数値解析手法として、形状の変化や非線形解析に対応できるＦＥＭが従来広く用いられてきた。しかし、ＦＥＭでは無限に広がった地盤をある解析領域に限定しなければならないなどの欠点もある。一方、近年、開発がさかんであるＢＥＭでは無限遠方の境界をも考慮できる。また、境界のみに要素を分割するので入力データの省力化にもなる。この様な両手法の特徴より地盤解析で、掘削領域周辺はＦＥＭ領域とし、その外側にＢＥＭ領域を用いた結合解法が有利になると考えられる。しかし、これまでに行なわれてきた結合解析では掘削を考慮した地盤解析は行なわれていない。すなわちＦＥＭでは増分形の定式化による逐次時間積分法[1]が広く用いられている。一方、ＢＥＭでは逆ラプラス変換による方法[2]と増分形式による方法[3]があるが、逆ラプラス変換による方法では掘削施工のような境界条件が刻々と変化する解析には不向きであり、また、従来の増分形式による解析では解析領域内にセルを設けており無限領域を考慮するのに不向きである。

そこで、筆者らは解析領域内にセルを分割することなしに時間に関する増分形の定式化による逐次時間積分法を用いたＢＥＭの粘弾性解析手法を提案した[4][5]。本論文ではこの手法を用いてトンネルを想定した簡単な掘削解析を行い、実際問題への適用の可能性を明らかにするものである。

2．ＢＥＭ粘弾性解析の定式化

ＢＥＭの定式化はまず時間空間おける境界積分方程式を導き、それに図－１に示すレオロジーモデルに限定した基本解を代入し、さらに、時間に関して後方差分をとることにより時間空間上での逐次時間積分法による境界積分方程式を導く。この方程式は履歴積分が前回の時間ステッの値のみで計算できる利点をもつ。増分形の境界積分方程式をマトリクス表示すると次式となる。なお、定式化の詳細は参考文献4)，5)に譲る。



図－１　レオロジーモデル

$$[H]\{\Delta U\}_{(n)}-\{\Phi\}_{(n-1)}=[G]\{\Delta P\}_{(n)}+\{\Psi\}^{(1)}_{(n-1)}+\{\Psi\}^{(2)}_{(n-1)}$$

3．結合解法による粘弾性解析

結合解法による数値解析例を示す。最初に厳密解のわかっている問題について解析を行い、本解析手法の妥当性について検討すると共にこの解析手法の性質について考察する。次に、トンネルを想定した簡単な掘削解析を行い実際問題への適用の可能性について検討する。解析は平面ひずみ状態を仮定し、ＦＥＭは定ひずみ要素を、ＢＥＭは一定要素を用いる。解析に用いた諸定数を表－１に示す。

表－１　解析諸定数

K_0	1280
G_0	480
G_1	160
η_{G1}	1600
$\tau=\eta_{G1}/G_1$	10

3－1　無限媒体中の円孔クリープ解析

無限に広がる粘弾性体中の円孔に内圧を作用させた場合のクリープ解析の計算結果を厳密解と比較する。

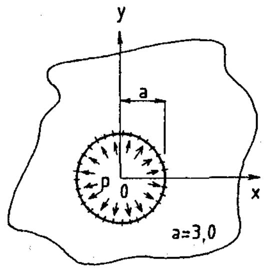
（１）　ＢＥＭのみの解析で計算結果と厳密解の比較を行うとともに要素分割数の計算結果に及ぼす影響について検討する。要素分割は図－２に示すように１２、２４、３６、４８、６０分割に等分割する。これら５ケース各々の計算結果を厳密解と併記して図－３に示す。この図より要素分割が細かいほど計算の精度が向上するのがわかる。１２分割の結果は厳密解と大きく異なるが、２４分割の結果では誤差は約5%で実用上充分な計算精度と考えられる。次に、演算時間の比較を表－２に示す。この表は２４分割を１とした場合の比率で表示している。表－２より演算時間は要素数の増加によって指数関数的に増加することを示している。この結果を参照し、これ以降の円孔の解析では２４分割を用いることとする。

（２）　結合解法による計算結果と厳密解とを比較する。要素分割図を図－４に示す。時間間隔Δｔ＝１、５、１０の３種類について各々計算し厳密解と比較する（図－５参照）。厳密解との比較は円孔の内壁面（r/a=1 ）と地山内（r/a=2 ）の２ケ所で行う。３種類の時間間隔の計算結果は厳密解と良く一致している。計算精度は時間間隔をかなり粗くしても低下しない。これは時間に関する増分形の定式化を後方差分により行なっているためと考えられる。

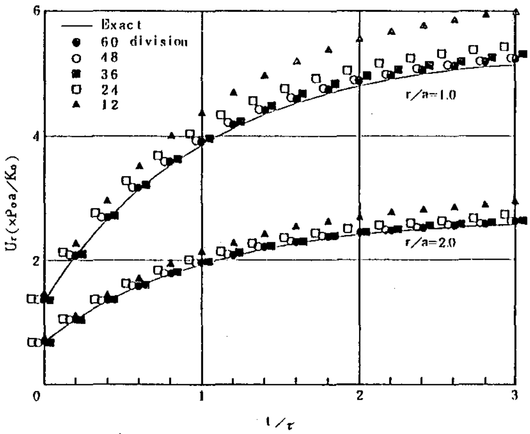
（３）内圧の２段階載荷解析を厳密解と比較する。時刻（ｔ／τ）＝０に内圧ｐを作用させ、さらに時刻（ｔ／τ）＝２０で、さらにもう一度ｐを作用させた場合の計算結果と厳密解の比較を図－６に示す。１回目の載荷後の挙動は良く一致している。２回目の載荷直後に厳密解と計算結果とは、誤差を生じるが時間の経過とともに厳密解に収斂していく。逆ラプラス変換による粘弾性解析では２段階載荷解析は複雑となるが本解析では荷重載荷時刻に荷重条件を追加するだけで通常の時間増分と同じstep by stepの計算で行なうことができる。

3－2　菱形トンネル掘削解析

簡単なトンネルのモデル化として菱形断面を考えて掘削解析を行い結合解法と有限要素解析の結果を比較する。図－７に要素分割図を示す。結合解析は有限要素数36と境界要素数12を用いる。一方、ＦＥＭ解析で



図－２　境界要素解析の要素分割図
（例：２４分割）



図－３　要素分割数の違いによる解析結果の比較

表－２　要素分割数の違いによるＣＰＵタイムの比

Division	Ratio (CPUtime)
12	0.19
24	1.00
36	3.62
48	9.85
60	22.65

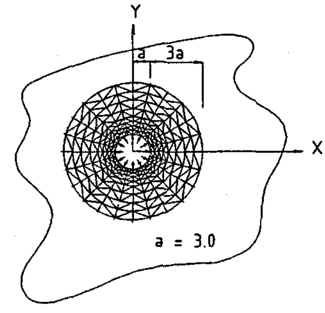
は有限要素数 136（対称性を考慮しない場合）を用いる。初期応力状態は Py=20とし、また側圧係数k=0.5とする。結合解法と有限要素解析の結果の比較を図－8に示す。両者の結果は初期の時点では良く一致しているが時間の経過と共に差異が生じ収束値では約10%の差異となる。これは、ＦＥＭの要素分割が粗いため、結合解法における有限要素領域が狭いため、さらには、ＦＥＭは定ひずみ要素をＢＥＭは一定要素を用いているので有限要素と境界要素の形状関数が一致してないために生じた差異と考えられる。

3－3　馬蹄形トンネル掘削解析

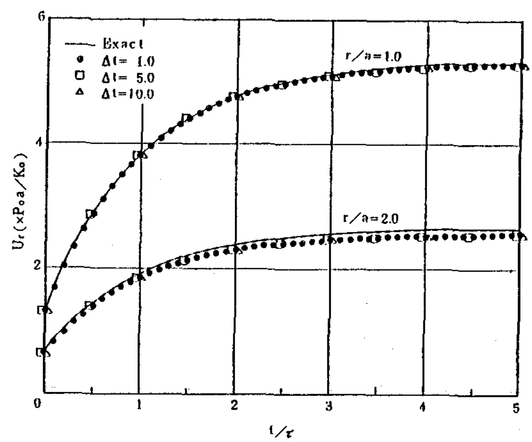
無限に広がる粘弾性地山に馬蹄形トンネルを掘削した場合の結合解法と有限要素解析の計算結果の比較を行なう。図－9に要素分割図を示す。結合解法は有限要素数 452と境界要素数24として計算し、有限要素解析は要素数 696（対称性を考慮しない場合）で計算する。ＦＥＭにおける境界条件は図－9に示す。初期応力状態は周辺等圧状態とする（P=2000）。また、トンネルは全断面掘削として一度に掘削して、その後は、無支保状態で放置されるものと仮定する。図－１０に天端変位に着目して両者の比較を行い、図－１１に側壁変位について比較する。側壁変位（図－１１）については両者の計算結果は良く一致しているが、天端変位（図－１０）には約10% 差異がある。この差異は境界条件の違いによるものと考えられる。ＢＥＭでは変位は拘束しないが、ＦＥＭでは無限に広がる地山を図－9に示すように限定し、側方変位は拘束していないが鉛直変位は下端で拘束している。このために、差異が生じたものと考えられる。

4．まとめ

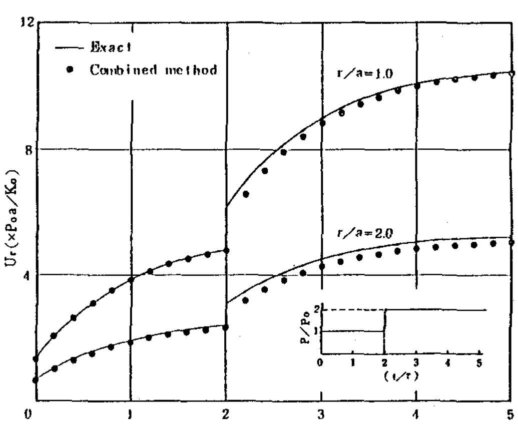
結合解法による解析を厳密解と比較した結果良い一致をみた。しかし、トンネルを想定した結合解法ではＦＥＭ解析と差異を生じる場合もあった。これは、結合解法における有限要素と境界要素の形状関数がＦＥＭでは定ひずみ要素、ＢＥＭでは一定要素を用いているためと考えられる。今後は、両者の要素の整合を保つよう境界要素に一次の形状関数を適用していく必要があると考えている。さらに、今回の検討で実際問題への適用の可能性が分ったので今後は、本手法を実際の掘削解析へと適用していきたいと考えている。



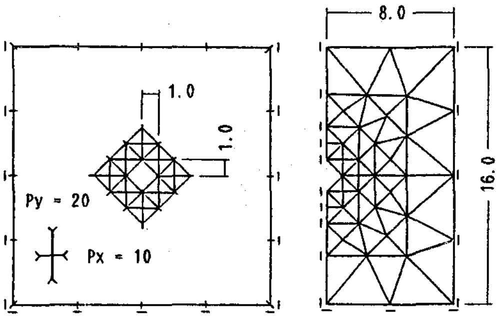
図－４　結合解法の要素分割図



図－５　時間間隔の違いによる解析結果の比較

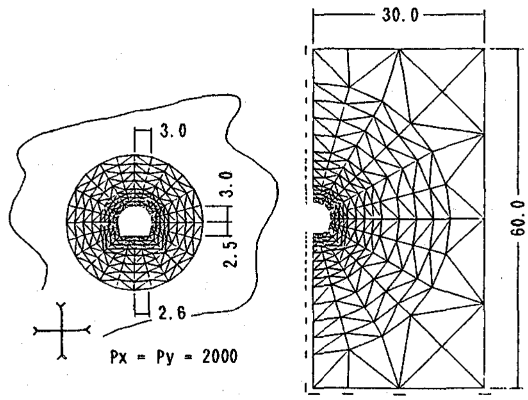


図－６　２段階載荷による解析結果と厳密解との比較



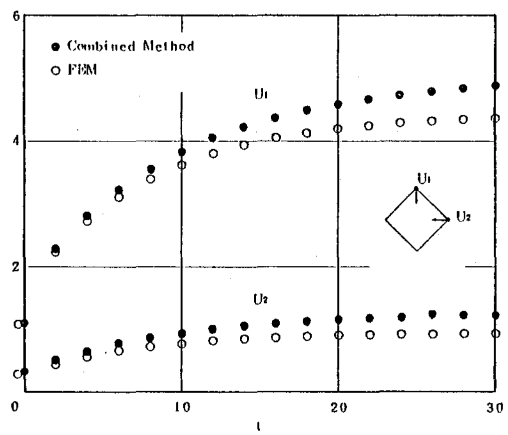
（a） 結合解法　　（b） 有限要素法

図－7　菱形トンネル掘削解析の要素分割図

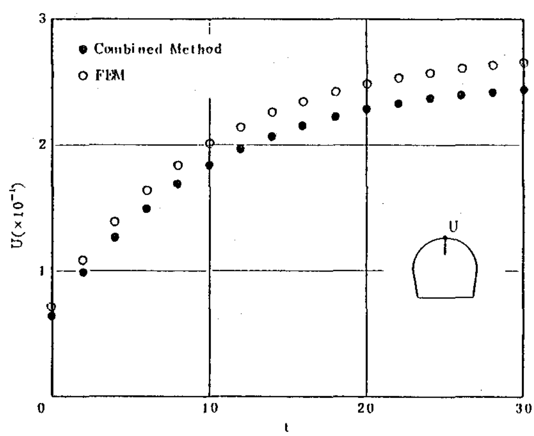


（a） 結合解法　　（b） 有限要素法

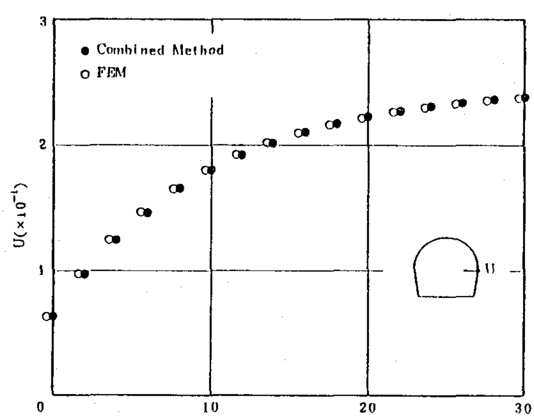
図－9　馬蹄形トンネル掘削解析の要素分割図



図－8　菱形トンネル掘削解析における
結合解法と有限要素法の解析結果の比較



図－10　馬蹄形トンネル掘削解析における
結合解法と有限要素法の天端変位の比較



図－11　馬蹄形トンネル掘削解析における
結合解法と有限要素法の側壁変位の比較

＜参考文献＞

1）山田嘉昭；塑性・粘弾性，培風館，1980

2）Kusama, T. and Y. Mitsui；Boundary Element Method Applied to Linear Viscoelastic Analysis, Appl. Math. Modelling , Vol.6 , pp.285-290, 1982

3）木村譲，滝本正己，塩島杜夫，田中正隆；境界要素法による線形粘弾性問題の増分解析，第一回境界要素法シンポジウム研究発表論文集，pp.265-270, 1984

4）篠川俊夫，金子典由，吉田望，川原睦人；有限要素・境界要素の結合解法による地盤構造物の粘弾性解析手法に関する一考察，第6回岩の力学国内シンポジウム講演論文集，pp.205-210, 1984

5）Kaneko, N., T. Shinokawa, N. Yoshida and M. Kawahara ；Numerical Analysis of Viscoelasticity using Boundary Element Method , Proc. 4th Int. Conf. Applied Numerical Modeling , pp.473-477, 1984

(52) Numerical Method of Viscoelastic Analysis using Combined Finite and Boundary Element Methods in Geotechnical Engineering

Noriyoshi Kaneko, Toshio Shinokawa, Nozomu Yoshida
Engineering Research Institute, Sato Kogyo Co.,Ltd.

Mutsuto Kawahara
Department of Civil Engineering, Chuo University

In geotechnical engineering, at the present, the finite element method (FEM) is the most popular numerical method. Recently, the boundary element method (BEM) is developing as one of the available numerical methods. In FEM and BEM, respectively, there are advantages and disadvantages. FEM is advantageous in analyzing geotechnical behavior when geometry and/or boundary change due to excavation or support system. BEM is advantageous in analyzing the behavior in the infinite domain of the ground. Consequently, it is considered effective to utilize the combined method in which respective advantages of FEM and BEM can be fully implemented.

We have already proposed a new numerical method of viscoelastic analysis using the time marching method by the BEM and have combined it with FEM. In the proposed method, there are two advantages;

1) The boundary integral equation can be formulated only on the boundary. Therefore, it doesn't require the provision of cells in the analytical domain.
2) Since the boundary integral equation can be formulated in an incremental form with time, the hereditary integral can be evaluated using only the values of the previous time step.

In this paper, Several numerical examples are presented to verify the validity and availability of the proposed method. And the combined method is applied to simple tunnel excavation problems in order to confirm the applicability of practical geotechnical problems. It is concluded that the combined method can be applied in the viscoelastic analysis of practical geotechnical structures such as underground openings and tunnels.