

(49) Fenner-Pacher 曲線についての考察 (その 2)

飛島建設(株) 正会員 ○ 福 島 啓 一

1. はじめに

トンネルの内空変位量と支保工に働く荷重との相関関係を与える地盤応答曲線 (または考案者の名前をとって Fenner-Pacher 曲線) は新オーストリアトンネル工法 (NATM) の最も基本的な概念を示すものと考えられている。しかし、その性格には、はっきりしない点もあり、計算法も示されていないため、実用に当って不便である。筆者は先に¹⁾単に弾塑性計算をするだけでなく、掘削に伴い一旦ゆるんだ地山が再圧密される現象を考慮し、地中埋設管に使われる Marston の式に準じて計算すべきであると提案したが、解式等が未誘導であった。ここに弾塑性理論に基づき、曲線を計算する式を誘導する。

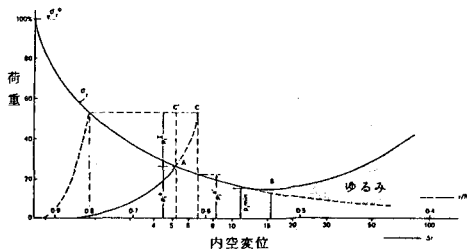


図-1 Fenner-Pacher 曲線

2. 円形トンネルと軸対称・完全弾塑性地山についての解

この問題は解析的に比較的容易に解けるので、古くから多くの研究者によって論じられており、その概要は Hoek 他²⁾の論文に示されている。しかし、これらの論文はすべてトンネル軸方向の応力 σ_z と、 σ_z の変化に伴う体積弾性率 K に基づく体積変化を考慮していない。従来³⁾の理論解は、

- (1) 完全弾塑性体としての仮定 (降伏後の強度劣化を含む)
- (2) Mohr-Coulomb, または Hoek-Brown の降伏規準
- (3) 塑性変形に伴って体積は変化しない。または関連流れ則, 直交則により塑性ひずみ (体積変化も含む) を生じる。
- (4) 長期強度・弾性係数と短期強度・弾性係数との差, 支保工設置時期のおくれ

などを前提としている。金属を対象に発達した弾塑性学では塑性変形に伴う体積変化はゼロと仮定している場合が多く、実測でもそれで良いことが証明されている。法面安定などを扱う場合には金属と同様、降伏後の弾性変形は塑性変形に比べ、小さいので無視できるとしている。しかし、トンネル問題のように全応力 $I_1 = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z$ が変化する場合には塑性変形に伴う弾性的挙動も無視できない大きさになる。弾塑性学の知識によれば、ひずみ増分と応力増分の間には次式⁴⁾の関係がある。

$$d\epsilon_{ij} = \frac{dI_1}{9K} \delta_{ij} + \frac{ds_{ij}}{2G} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \dots\dots\dots (1)$$

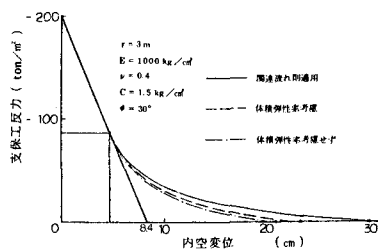


図-2 構成方程式の違いによる変位荷重曲線

Mohr-Coulomb の降伏条件を用いて軸対称の場合についてこの式を解くと、

$$dekk = -\frac{G+9Ka^2}{3KG} \times 2(1+\nu)(P_\infty - C \cot \phi) \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi}} \right\} \times \frac{k - 4\alpha C(1+\nu) \cot \phi - 2\alpha(1+\nu)(P_\infty - C \cot \phi) \left\{ 1 + \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi}} \right\}}{k - 3\alpha C \cot \phi - 6\alpha(P_\infty - C \cot \phi) \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi}}} \quad \dots (2)$$

また、これを解くためには Drucker-Prager の降伏条件などのように σ_z の項を含む降伏条件式を用い、 $\epsilon_z = \epsilon_z^e + \epsilon_z^p = 0$ (トンネル軸方向のひずみゼロ) の仮定の下に σ_z を求めねばならない。今、多少簡略化して、Mohr-Coulomb の降伏条件を用い、 $\sigma_z = \nu (\sigma_r + \sigma_\theta)$ として、解いた例を示す (図-2)。体積弾性率及び塑性体積膨張の影響が大切なことがわかるであろう。

3. 円形トンネル、線対称問題としての解

鉛直方向に P_V 、水平方向に P_H の地圧を受ける地山内に円形トンネルを掘った場合については、von Mises の降伏条件 (Mohr - Coulomb の降伏条件で $\phi=0$ とした場合に同じ) の下に Galin が解いている⁷⁾ (但し、塑性域はトンネルの全周を取り囲んだ場合についてのみ)。この解によると弾塑性境界はだ円になる。 $\phi \approx 0$ の土砂や岩石の場合は、塑性域内の応力関数が重調和関数にならないので、同じ方法で解くことはできないが、弾塑性境界の形はだ円か、またはだ円にごく近い形になると考えられる。塑性域内は軸対称の応力状態になっているとすれば、だ円孔周りの弾性解と組合わせて解くことができる。すなわち、塑性域内の応力は、

$$\sigma_r = C \cot \phi + (P_i - C \cot \phi) \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi}} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\sigma_\theta = C \cot \phi + \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} (P_i - C \cot \phi) \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi}} \quad \dots\dots\dots (4)$$

一方、だ円の弾性解より S 点 (側壁) では、

$$\sigma_r + \sigma_\theta = -P_H + P_V \left(1 + \frac{2A}{B} \right) \quad \dots\dots\dots (5)$$

R 点 (天端) では、

$$\sigma_r + \sigma_\theta = -P_V + P_H \left(1 + \frac{2B}{A} \right) \quad \dots\dots\dots (6)$$

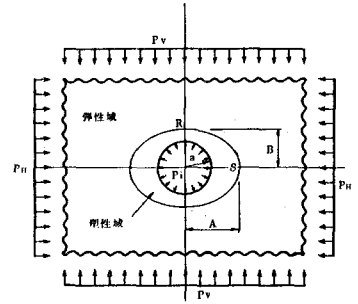


図-3 円孔まわりの塑性域 (だ円)

従って、(3)、(4)式に $r = A$ あるいは $r = B$ を代入して、(5)あるいは(6)式と等しいと置いて解けば、弾塑性境界の形が求められる。また、応力分布も全域に亘って求められる。ひずみ及び変位は弾性域については、アエリーの応力関数より求められる。塑性域は、外周部 (弾塑性境界) の変位 (u_r , u_θ) が与えられるので、変形前の放射方向の直線は変形後も直線である、と仮定すれば求められる。鉛直圧力が卓越する場合、水平方向の変位が大きくなり、L.v Rabcewicz の指適が正しいことがわかる。

4. 地山の自重を考慮した解

Fenner - Pacher 曲線の右上りの部分は、ゆるんだ地山の自重により生ずると考えられている。P.Egger³⁾ は、ゆるみ部分の自重をまるまる荷重とする解を示しているが、これはあまりにも概算であるので、次にこの式を導く。極座標で表わした応力のつり合いは、

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = -\rho g \cos \theta \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = -\rho g \sin \theta \quad \dots\dots\dots (8)$$

主応力 σ_1 , σ_3 は一般に、 θ 方向、 r 方向といくらかの角度をもっているが、 $\theta = 0^\circ$ (天端・底盤) と $\theta = 90^\circ$ (側壁) においては両者の方向は完全に一致する。従って、 σ_r , σ_θ を主応力としても誤差は小さく、 $\theta = 0^\circ$ または $\theta = 90^\circ$ においては誤差ゼロである。従って、 σ_1 , σ_3 と σ_r , σ_θ の方向は一致するとして、Mohr - Coulomb の降伏条件を採用し、

$$\sigma_\theta = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \sigma_r - \frac{2C \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad \dots\dots\dots (9)$$

これを(7)、(8)式に代入すると、

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\sin \phi}{1 - \sin \phi} \sigma_r - \rho g \cos \theta = -\frac{1}{r} \frac{2C \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad \dots\dots\dots (10)$$

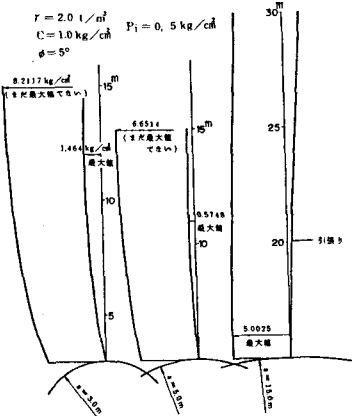
これを解くと、

$$\sigma_r = C \cot \phi + (P_i - C \cot \phi) \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi}} + \frac{1 - \sin \phi}{1 - 3 \sin \phi} \rho g \left[r - a \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi}} \right] \cos \theta \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\sigma_\theta = C \cot \phi + \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} (P_i - C \cot \phi) \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi}} + \frac{1 + \sin \phi}{1 - 3 \sin \phi} \rho g \left[r - a \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi}} \right] \cos \theta \quad \dots\dots\dots (12)$$

σ_z は $\varepsilon_z = \varepsilon_z^e + \varepsilon_z^p = 0$ として求めるべきであるが、計算はかなり複雑になる。弾塑性境界付近では弾性変形の方が大きいので $\varepsilon_z^e = 0$ 、従って $\sigma_z = \nu (\sigma_r + \sigma_\theta)$ として求めて良い。塑性変形が進んだ所では塑性変形の方が大きいので $\varepsilon_z^p = 0$ として、一般の塑性論で示されているようにして解くべきであるが、全域を $\sigma_z = \nu (\sigma_r + \sigma_\theta)$ として解いてもあまり誤差はない。

さて、Fenner-Pacher 曲線において Pimin (最少支保工荷重) が存在し、それより曲線が右上りになるためには半径 r と σ_r (圧縮力を正と考える) の関係で最大値が存在しなければならない。その最大値と弾性域側から求められる必要境界部応力 $\sigma_{r, req}$ とが等しくなるような場合が Fenner-Pacher 曲線の Pimin の状態と対応するものと考えられる。上式を見ると $\theta = 0^\circ$ 付近では $|\sigma_r|$ の最大値が存在し、しかもその値はトンネルの大きさの影響を受けるので、非常によく現象を説明できるようなのである。そこで前節にならい、数値を入れて計算してみると、図-4 のようになり、現実には予想される最少支保工反力よりも相当小さな値を与えることがわかる。しかも天端付近が弾性限界を越えて、塑性変形するのは相当側圧係数が大きい場合に限られるが、計算例に示すように半径 15M もの大空洞を $C = 1.0 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\phi = 5^\circ$ 側圧係数 0.8 程度の軟弱地山の地点に選定するという現実には考えられない地山条件でのトンネルを除けば、 $P_i = 0$ にしても充分安定の場合が多い。従ってこの式より Fenner-Pacher 曲線の右上りの部分を説明することはできない。



5. 球形空洞

切羽附近は、平面ひずみ状態よりも球形空洞に近いと考えられる。球形空洞の応力のつり合いを考えると、

$$2(\sigma_r - \sigma_t) + r \frac{d\sigma_r}{dr} = \rho g \cos \theta \quad \dots\dots\dots (13) \quad \text{図-4 自重を考慮した場合の応力分布}$$

σ_r , σ_t を主応力と考え、Mohr-Coulomb の降伏条件を代入してこの式を解くと、塑性域内の応力は次のように求められる。

$$\sigma_r = C \cot \phi + (P_i - C \cot \phi) \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{4 \sin \phi}{1 - \sin \phi}} + \frac{1 - \sin \phi}{1 - 5 \sin \phi} \rho g \cos \theta \left[r - a \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{4 \sin \phi}{1 - \sin \phi}} \right] \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\sigma_t = C \cot \phi + \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} (P_i - C \cot \phi) \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{4 \sin \phi}{1 - \sin \phi}} + \frac{1 + \sin \phi}{1 - 5 \sin \phi} \rho g \cos \theta \left[r - a \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{4 \sin \phi}{1 - \sin \phi}} \right] \quad \dots\dots\dots (15)$$

一方弾性域では、 $P_H = P_V$ の場合で考えると、

$$\sigma_t = -P_i \frac{a^3}{2r^3} + P_\infty \frac{2r^3 + a^3}{2r^3} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\sigma_r = P_i \frac{a^3}{r^3} + P_\infty \frac{r^3 - a^3}{r^3} \quad \dots\dots\dots (17)$$

但し、 a , P_i を弾塑性域境界の半径及びその点での内圧とする。これより球形空洞周囲の応力分布や変位分布を求めることができる。

6. 延性変形とぜい性変形

トンネルを掘削した瞬間には支保工は設置してなく、その間の地山の塑性変形はぜい性変形であり、著しい体積膨張と強度劣化を伴うものと考えられる。ある程度の時間が経ってから支保工が設置されるが、その後の変形は一般に支保工等により強く拘束されており、延性破壊であり、完全弾性体と仮定してほぼ差しつかえないものと考えられる。岩石の場合についての延性とぜい性の境界は茂木⁴⁾により図-5 のように示されており、割れ目等を含む岩盤においてもこれに似た関係が成

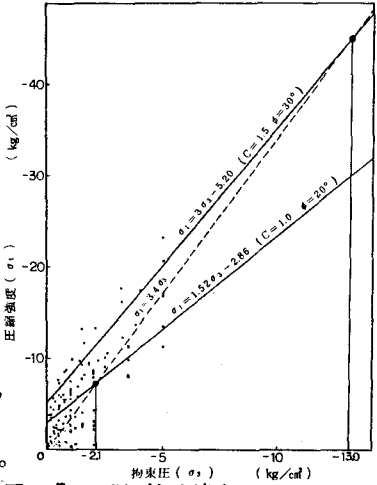


図-5 ぜい性破壊と延性破壊の区別(茂木による)

立っているものと考えられる。降伏条件より求まる σ_1 と σ_3 の関係を図-5と重ねて描くとトンネルを延性変形させるために最少限必要な支保工反力を求めることができる。これより小さな支保工反力であれば大幅な強度劣化が起こるので、今までの計算式に低減した c 、 ϕ の値を用いる必要がある。また、支保工を設置するまでの短い時間にはどうしてもぜい性破壊を生じるので、これを防ぐことも必要である。但し、前節にも述べたように、多少の c 、 ϕ の低下があっても Fenner-Pacher 曲線の右上り部分を説明できるほどではない。

7. ゆるみと再圧密

掘削に伴ってゆるみ、体積膨張あるいは強度劣化を起こした地山は、トンネルに支保や巻立が施工されると再び締まってくる。Drucker-Prager の相関流れ則、直交則によると塑性変形によるひずみはすべて体積膨張だけをもたらす、僅かに体積弾性率による体積減少だけがあり得ることになる。しかし、トンネル周辺のように大きな変形が起こる時は、そう長くは体積膨張が続かず、例えば、Ladanyi は r Yield の3倍までしかダイレタンスーは起こらないとしている。また、一旦生じた体積膨張（ダイレタンスー）のうちの相当部分は再圧密により回復されるものと考えられる。岩石や土砂の構成方程式が確立されれば、これは計算でも求められる問題であろうが、ここではトンネルでの計測その他から以上の挙動が予測されることを述べるに止める。

さて、支保工設置前のひずみ分布と、支保工設置後再圧密が済んだ後のひずみ分布とを以上の計算式より求めることができる。両者の差の分（または体積膨張（ダイレタンスー）が100%回復されるのでなければ、差に回復率を掛けた分）が支保工設置後の付加ひずみであり、これを積分すれば変位を求めることができる。この場合、この変位はすべて鉛直方向に起こるものと考えても誤差は少ない。そうすれば、この沈下量の差から地中埋設管の荷重計算に用いる Marston の式⁵⁾、またはその改良式⁶⁾を用いてトンネル支保に働く荷重を計算することができる。この場合、支保工設置前の計算には、無支保区間の長さや切羽断面の分割などに応じて、球形空洞の有効半径を変化させ、また、支保工設置までの時間に応じて地山の短期強度や短期弾性率を設定することにより、施工条件を反映させることができる。これより Fenner-Pacher 曲線は単純に内空変位量の関数として描かれるものではなく、掘削時の地山のゆるませる程度及び支保工の剛性の二つにより影響されるものであることがわかる。

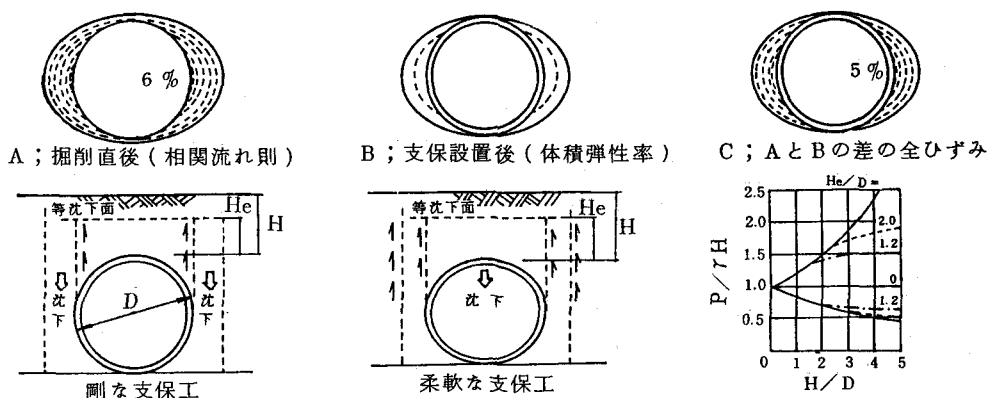


図-6 Marston 式による荷重係数（松尾等による）と荷重の計算手順

参考文献

- 1) 福島啓一; Fenner-Pacher 曲線についての考察 第14回岩盤力学シンポジウム1982. 土木学会
- 2) Brown, Edwin T., Bray, John W., Ladanyi, Branko and Hoek, E.; Ground Response Curves for Rock Tunnels. J. of Geotechnical Eng. Div. ASCE, Vol. 109, No. 1, Jan. 1983
- 3) Egger, Peter; Einfluß des Post-Failure-Verhaltens von Fels auf den Tunnelausbau unter besonderer Berücksichtigung des Ankerbaus 1973 学位請求論文
- 4) Mogi, K; Pressure Dependence of Rock Strength and Transition from Brittle Fracture to Ductile Flow. Bulletin of the Earthquake Research Institute Vol. 44, 1966
- 5) 松尾稔, 堀内孝英; Marston-Spangler 理論の設計への適用に関する研究, 土質工学会論文報告集 第15巻, 第2号, pp. 97~107. 1975
- 6) 福島啓一; 地下構造物に働く土圧の計算 - Anson Marston の式の改善, 土木学会年次大会Ⅲ-109. 1983
- 7) 土木学会; 土木技術者のための岩盤力学 1966 P238~243

(49) ANALYSIS OF THE FENNER-PACHER CURVE (PART II)

Keiichi Fukushima

Tobishima Construction Co., Ltd.

SUMMARY

The reciprocal relationship between the required lining resistance and radial deformation of the cavity has been studied by R. Fenner and F. Pacher. The graph which demonstrates this relationship is called the ground reaction curve or Fenner-Pacher curve and this relationship is one of the most important elements of the New Austrian Tunnelling Method (N.A.T.M.).

However, this relationship has not been comprehensively studied, so the author tries to make a pertinent formula to define this relationship. He uses the circular tunnel in the elastic perfectly-plastic body in the gravitate field and tries to develop analytical solution.

Also he introduces the criteria which distinguish ductile and brittle deformation, the idea of the loosening of the surrounding ground before the installation of the support, re-compaction of them after the installation of the supports and linings, the dilatancy accompanied with plastic deformation according to the associated flow rule, and volume change according to the bulk moduli.

These ideas and observation of the actual tunnel behavior lead him to the conception that the phenomenon which occurs around the tunnel is similar to that which occurs around a pipe culvert embedded in the embankment, so he is helped by the Marston-Spangler's theory and its modification made by the author himself.

These analysis make clear the fundamental of the Fenner-Pacher curve apparently and possible it to apply to the actual tunnel work.