

(10) 内部まさつ角を考慮した剛塑性有限要素法

京都大学工学部 正会員 ○ 田 村 武

京都大学工学部 正会員 小 林 昭 一

京都大学大学院 学生会員 角 哲 也

1. はじめに

上界法（機構法）に基づく構造物の極限解析を有限要素法により数値的に行う手法をとくに「剛塑性有限要素法」という。本来、金属材料の塑性加工の分野より発展してきた解法であり、主として内部まさつ角のない、いわゆる $\phi = 0$ 材料を対象にして研究が進められてきた。しかし、岩質材料等においては通常、降伏条件（あるいは破壊条件）は等方応力に依存するものと見なされ、岩盤力学にこの剛塑性有限要素法を適用するには、内部まさつ角 ϕ を考慮した解析法を検討する必要がある。

本研究では、まず、内部まさつ角 ϕ のある材料に対して剛塑性有限要素法の定式化を行い、つぎに、上界法とつりあい式との関係、あるいは変形に関する拘束条件とそれに伴う「不定応力」との関係について述べるとともに、いくつかの数値計算例を示す。また、降伏条件における内部まさつ角 ϕ と、塑性ポテンシャルにおける内部まさつ角 ψ とが異なる場合、すなわち、いわゆる非関連流れ則 (Non Associated Flow Rule) を適用する場合についても概説する。

2. 降伏条件と変形に関する制約条件

ここで用いる降伏関数は、つぎの Drucker-Prager 型とする。

$$f = -\alpha I_1 + \sqrt{J_2} \quad (= k) \quad (1)$$

ここに、 α , k は定数であって、 σ_{ij} を応力とすると、 $I_1 = \sigma_{ii}$, $J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} I_1 \delta_{ij}$ であり、また、 δ_{ij} は Kronecker の記号である。

当分の間、降伏関数と塑性ポテンシャルとが等しいとする Associated Flow Rule を適用するが、このとき Λ を未知定数として、塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ は

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \Lambda (-\alpha \delta_{ij} + S_{ij} / 2\sqrt{J_2}) \quad (2)$$

のように表される。

また、本研究では簡単のため、すべて平面ひずみ条件を満たす二次元問題を扱うが、 $\dot{\epsilon}_{33} = 0$ を上式に代入することにより、

$$J_2 = \left\{ \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2 \right\} / (1 - 3\alpha^2) \quad (3)$$

を得る。さらに、これらを降伏関数 f に代入し、式 (1) を変形すれば

$$f = -3\alpha \left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \right) + \sqrt{1 - 3\alpha^2} \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2} \quad (= k) \quad (4)$$

となる。一方、Mohr-Coulumb 型の降伏条件は、内部まさつ角を ϕ 、粘着力を c として

$$c \cos \phi + \left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \right) \sin \phi = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2} \quad (5)$$

と書けることより、以下の関係式のもとで、二つの降伏条件は一致することがわかる。

$$\cos \phi = \sqrt{\frac{1 - 12\alpha^2}{1 - 3\alpha^2}} \quad c = \frac{k}{\sqrt{1 - 12\alpha^2}} \quad (6)$$

式 (2) より

$$\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \Lambda^2 \left(3\alpha^2 + \frac{1}{2} \right) \quad (7)$$

となるが、これより Λ を求めた後、これを再び式 (2) に代入し、体積塑性ひずみ速度 $\dot{\theta} = \dot{\epsilon}_{ii}$ を計算すれば

$$\dot{\theta} + \beta \dot{e} = 0 \quad (8)$$

を得る。ここに、 $\dot{e} = \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}$ 、 $\beta = \frac{\sqrt{2} \sin \phi}{\sqrt{1 + \sin^2 \phi}}$ である。 $\dot{e}$ は定義より、つねに正であるが、一方、 $\dot{\theta}$ は Normality Rule よりつねに負（膨張）である。式 (8) は、ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ に課せられた制約条件であって、これを満足しないひずみ速度は、いま考えている降伏条件に対し Normality Rule を乱すことになり用いることはできない。以下においては、式 (8) を満たすひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ のみを考える。

3. 上界法

極限解析における上界定理とは、「任意の運動学的に許容なひずみ速度場 $\dot{\epsilon}_{ij} \left[= \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \right]$ に対して

$$\bar{\rho} \left\{ \int_V \chi_i \dot{u}_i dV + \int_{S_\sigma} T_i \dot{u}_i dS \right\} = \int_V D(\dot{\epsilon}_{ij}) dV \quad (9)$$

により定義される荷重強度 $\bar{\rho}$ は真の極限荷重 ρ^* よりも大きい」ことを指す。ここに、 $\dot{u}_i$ 、 T_i

χ_i はそれぞれ変位速度、応力境界 S_σ 上の traction、および物体力である。つまり、予め与えられた外力系 (χ_i 、 T_i) に対して、その $\bar{\rho}$ 倍の荷重系を支えることはできないということである。言い換えるならば、式 (9) で定義される $\bar{\rho}$ を最小にすることにより、真の荷重強度 ρ^* が求まる。

なお、ここで、右辺にある $D(\dot{\epsilon}_{ij}) = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$ は、ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ が与えられたとき、それに対して Normality Rule を満足するような応力 σ_{ij} との積として定義されるもので、エネルギー消散率と呼ばれる。 $\dot{\epsilon}_{ij}$ に対して σ_{ij} は一意的に確定しないが、それらの積 $\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$ 自身は一意的であることより、 $D(\dot{\epsilon}_{ij})$ は $\dot{\epsilon}_{ij}$ のみの関数と考えてよい。ただし、その定義域は、運動学的に許容なひずみ速度であると同時に、制約条件式 (8) を満足するものの集合である。式 (9) の両辺の積分が変位 (ひずみ) 速度に対して一次であることより、上界定理に基づく極限荷重強度 ρ^* の解析はつぎのように言うことができる。

問題 A

$$\bar{\rho} = \int_V D(\dot{\epsilon}_{ij}) dV \rightarrow \min. \quad \text{sub. to } \begin{cases} \int_V \chi_i \dot{u}_i dV + \int_{S_\sigma} T_i \dot{u}_i dS = 1 \\ \dot{\theta} + \beta \dot{e} = 0 \end{cases}$$

平面ひずみ条件のもとで、Drucker-Prager の降伏条件について具体的にエネルギー消散率を求めてみよう。斉次関数の微分に対するオイラーの定理と式 (7) に注意すれば、容易に

$$D(\dot{\epsilon}_{ij}) = \gamma \dot{e} \quad (10)$$

となることがわかる。ここに、 $\gamma = \frac{\sqrt{2} c \cos \phi}{\sqrt{1 + \sin^2 \phi}}$ である。

つぎに、問題 A に対する解の必要条件を求めるために、制約条件付きの変分問題を考える。 λ 、 μ を二つの制約条件に対するラグランジュ乗数として、形式的に汎関数：

$$\Phi(\dot{u}_i, \lambda, \mu) = \int_V D(\dot{\epsilon}_{ij}) dV + \int_V \lambda (\dot{\theta} + \beta \dot{e}) dV - \mu \left(\int_V \chi_i \dot{u}_i dV + \int_{S_\sigma} T_i \dot{u}_i dS - 1 \right) \quad (11)$$

の第一変分をとり、ガウスの定理を用いて整理した後、見掛け上の独立変数 $\dot{u}_i$, λ および μ の変分に掛かる係数を零とおくことにより、以下の必要条件を得る。(ただし、この問題はいわゆる凸計画問題であり、十分条件でもある。)

$$\left\{ \gamma \frac{\dot{\varepsilon}_{ij}}{\dot{e}} + \lambda \left(\delta_{ij} + \beta \frac{\dot{\varepsilon}_{ij}}{\dot{e}} \right) \right\}_{,j} + \mu X_i = 0 \quad \text{in } V \quad (12)$$

$$\left\{ \gamma \frac{\dot{\varepsilon}_{ij}}{\dot{e}} + \lambda \left(\delta_{ij} + \beta \frac{\dot{\varepsilon}_{ij}}{\dot{e}} \right) \right\} n_j = \mu T_i \quad \text{on } S_\sigma \quad (13)$$

$$\dot{\theta} + \beta \dot{e} = 0 \quad (14)$$

$$\int_V X_i \dot{u}_i dV + \int_{S_\sigma} T_i \dot{u}_i dS = 1 \quad (15)$$

式(12)はつりあい条件であり、上界法に基づく極限解析が塑性つりあい状態を求めているに他ならないことを意味している。また、ラグランジュ乗数の一つ μ は、外力系の大きさ ρ^* に等しい。もう一方のラグランジュ乗数 λ の係数 $\delta_{ij} + \beta \frac{\dot{\varepsilon}_{ij}}{\dot{e}}$ を応力(あるいは、ひずみ)空間のベクトルと見るとき、これは Drucker-Prager 型の降伏曲面(円錐状曲面)の母線の方を指していると捉えることができる。つまり、式(8)の制約条件を満たす一つのひずみ速度を与えたとしても、降伏曲面の表面が平面あるいは直線を含むために、Normality Rule によって対応する応力を一意的に定めることができず、ある種の「不定応力」成分が現れる。von Mises 型の降伏条件では、塑性体積ひずみが零となることに対応して不定応力として等方圧を持つが、Drucker-Prager 型では、制約条件式(8)に対応して、せん断成分を含む不定応力を持つことになる。そして、その大きさがラグランジュ乗数 λ であり、それがつりあい条件から決まることを式(12)は示している。

有限要素法による式(12)～(15)の解法は、参考文献1)のものとはほぼ同様であって、それを省略する。

4. 数値計算例

ここでは最も簡単な例題として、浅い基礎の支持力を解析する。図一1, 2の(a), (b)は、それぞれ内部まさつ角 ϕ が 10° , 30° の場合の極限状態における速度場と主応力を示したものである。境界条件等は図示の通りである。(速度場については、その相対的な大きさのみに意味がある。また、応力の大きさは、図一1と2で共通でない。) 応力の相対的な分布状態があまり異ならないことに比較して、速度場は ϕ によって著しく変化する。つまり、大きな ϕ の場合には、ダイレイタンスによる体積膨脹のため自由表面の上昇が顕著となる。荷重下の沈下の数倍の上昇は不自然であり、ダイレイタンスを抑制したモデル、すなわち、塑性ポテンシャルの内部まさつ角 ϕ ($< \phi$) を持つモデルを考えて Non Associated Flow Rule を適用するのが望ましいと思われる。そこで図一3, 4は、それぞれ ϕ が 15° , 0° として解析したときの速度場を示している。これからも明らかなように、 0° に近い ϕ の結果の方が自然である。(なお、Non Associated Flow Rule を剛塑性有限要素法に適用する場合には ϕ に対して Associated Flow Rule を適用しながら、応力状態に応じて式(1)の定数 k を変化させればよい。その定式化の詳細は省略する。)

図一5は、計算結果の精度と ϕ による支持力の変化を見るために示されたものである。横軸は内部まさつ角 ϕ 、縦軸は無次元化された支持力 (q/c) であって、また、曲線は Associated Flow Rule に対する厳密解である。各 ϕ に対する数値解の上端は $\phi = \phi$ に、下端は $\phi = 0$ に相当している。一般に、 ϕ が小さくなるにつれ、支持力も減少することがわかる。

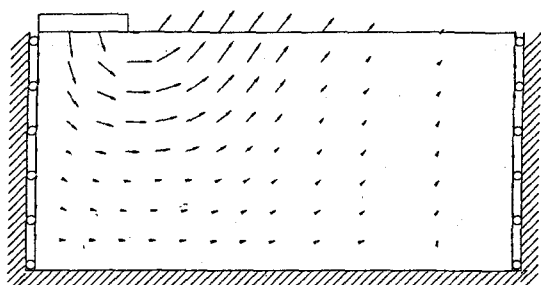
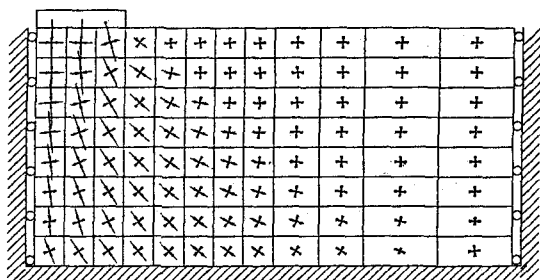


图-1 (a)

$\phi = 10^\circ$



(b)

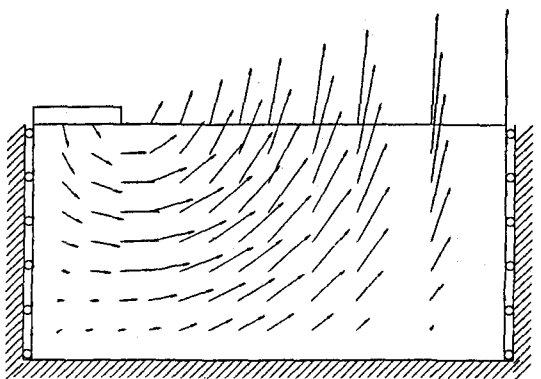
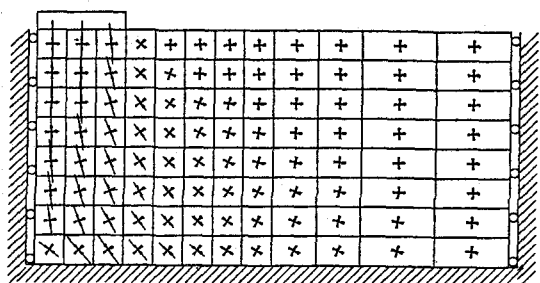


图-2 (a)

$\phi = 30^\circ$



(b)

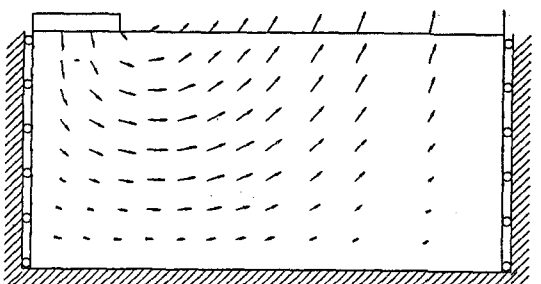


图-3 $\phi = 30^\circ, \phi = 15^\circ$

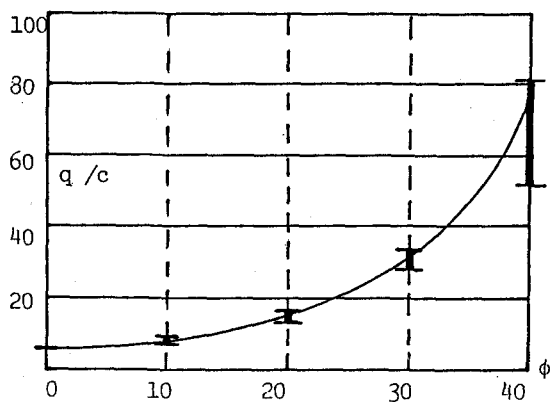


图-5

参考文献

- 1) T.Tamura, S.Kobayashi & T.Sumi : Limit Analysis of Soil Structure by Rigid Plastic Finite Element Method, Soils & Foundation, Vol.24, No.24, 1984.
- 2) W.F.Chen: Limit Analysis and Soil Plasticity, Elsevier, 1975.

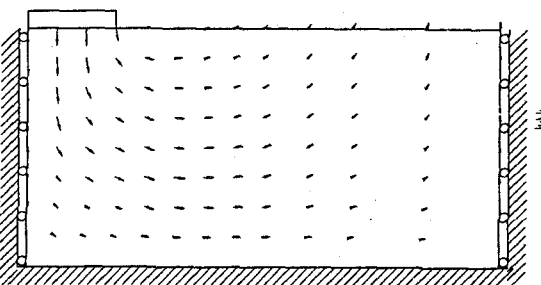


图-4 $\phi = 30^\circ, \phi = 0^\circ$

(10) RIGID PLASTIC FINITE ELEMENT METHOD WITH FRICTION ANGLE

T. Tamura, S. Kobayashi & T. Sumi

Dept. of Civil Eng., Kyoto Univ.

Abstract

We investigate a numerical approach to analyze the limit state of continuum such as rock foundation by means of the rigid plastic finite element method. Most of studies of this method in the literature have not taken into consideration the effect of the internal friction angle since there may be a rather complicated problem concerning the concept of the admissible strain rate for the yield function which depends on the mean stress, i.e., for the yield condition with the internal friction angle. In other words, it seems to be difficult to form a strain rate which satisfies the associated flow rule for some stress state being on the yield surface. But if we apply the rigid plastic finite element method to the rock-like material, it is always necessary to consider the effect of the internal friction angle and therefore we have to investigate how to treat this difficulty.

In this paper, we firstly write in concrete form the constraint condition on the strain rate in order that it can become kinematically admissible for Drucker-Prager yield condition. Secondly, we formulate the rigid plastic finite element method with the internal friction angle by using the variational principle with several Lagrange multipliers and make clear the indeterminate stress associated with constraint conditions on strain rate. After showing some results of numerical calculation, we refer to the formulation in case of the non-associated flow rule, which is necessary to reduce the volumetric expansion due to the dilatancy.