

(5) 一般化されたクラックテンソルとその応用

埼玉大学・工学部 小田 匡寛

1 はじめに

岩盤の力学的挙動は、クラック(断層・節理)、水、初期地圧などを考慮して検討されなければならない。特にクラックの存在は、岩盤の力学的解析を著しく困難にし、また連続体の力学を確立させた諸原理を岩盤に適用する際、技術者に不安を感じさせる原因ともなっている。本来不連続な岩盤がある合理的な基準をそれと力学的に等価な連続体と近似できるとしたら、技術者の感じる不安の一部は解消されるに違いない。小田らによるクラックテンソル $E^{(m)}$ は、“等価な連続体を定義するための合理的な基準”を提供するために導入されたものであり、次式で定義される。^{1),2)}

$$E^{(m)} = \frac{\pi \rho}{4} \int_0^{\pi} \int_0^{\Omega} r^m n_i n_j \cdots n_i n_j E(n, r) d\Omega dr \quad (1)$$

r = クラックを円板と近似した時の直径。 ρ = クラックへの単位法線ベクトル。 ρ = 単位体積あたりのクラック数。 $E(n, r)$ = ρ と r の分布を特徴づける確率密度関数。 Ω = 全立体角。 m = 正の整数。

この報告では、節理性岩盤をそれと等価な連続体、多孔質媒体と近似するための一般的手法を示すと共に、その弾性コンプライアンス、透水テンソルをEq.(1)の一般化されたクラックテンソルの関数として定式化する。

2 クラックのスプリングモデル

岩盤中のクラックは、Fig. 1 に示すように、二つのスプリングを結合された平行板としてしばしばモデル化され、その力学性を特徴づけるせん断剛性、垂直剛性についても室内・現位置での試験から多くの知見が得られている。^{3),4),5)}ここでは、クラックをスプリングでモデル化し、材料の弾性コンプライアンスと透水テンソルを、従来から知られている実験事実をできるだけ取り込んだ形で定式化することにする。

せん断剛性率: せん断剛性率は、単位のせん断変位に対するせん断応力として定義される。実験によると、せん断応力 $\sim$ せん断変位の関係は、一部が例外を除い

て非線型(双曲線を近似される)であり、従ってそのせん断剛性も一義的には決められない。ここでは単純化して、最大せん断応力をその時の変位で除した平均的なせん断剛性率 G (Barton⁶⁾による peak shear stiffness)を用いる。Barton⁶⁾は、最大せん断応力を発揮する時のせん断変位は、およそクラックの長さ r の1%程度であるとの観察から、せん断剛性率 G として

$$G = \frac{100}{r} \bar{\sigma}_n \tan \{JRC \log_{10} \left(\frac{JCS}{\bar{\sigma}_n} \right) + \phi_r\} \quad (2)$$

を提案している。 $\bar{\sigma}_n$ はクラックへの垂直応力で、巨視的応力テンソル $\bar{\sigma}_{ij}$ とすれば $\bar{\sigma}_{ijn}n_j$ に等しい。また式中のJRCとJCSは、それぞれクラックの粗度、強度を示すBarton⁶⁾の指標である。Eq.(2)は、 G の応力依存性のみならず寸法効果をも表わしているが、そのまま使うには複雑すぎるので、 $\bar{\sigma}_n$ の効果について次式のように線型化して置く。

$$G = \frac{g}{r} \bar{\sigma}_n = \frac{g}{r} \bar{\sigma}_{ij} n_i n_j \quad (3)$$

ここでは実験的に求めらるべき常数であって、応力と同じ次元を持つ。さらにクラックの方向分布を表わす密度関数 $E(n)$ を用いて、 G を全方位角(全立体角 Ω)で平均化する。

$$\bar{G} = \int_{\Omega} G E(n) d\Omega = \frac{g}{r} \bar{\sigma}_{ij} N_{ij} = \frac{1}{r} g(\bar{\sigma}, N) \quad (4)$$

$$\text{ただし, } N_{ij} = \int_{\Omega} n_i n_j E(n) d\Omega; g(\bar{\sigma}, N) = g \bar{\sigma}_{ij} N_{ij} \quad (5)$$

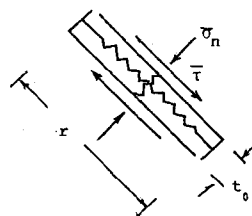


Fig. 1 Spring model for cracks

N_{ij} は、クラックの方向分布によって定まる二階の対称テンソルであり、また $g(\bar{\sigma}, N)$ は、二つのテンソル $\bar{\sigma}$ 、 N に依存するスカラー量であり、応力の次元を持つ。厳密に云

えば勿論せん断剛性率はクラックの方向に依存して変化するが、Eq.(4)では方向について平均化している点に注意しなければならない。実岩盤のクラックのせん断剛性率を曖昧さを残さずに推定するのは現状では不可能に近いことを考えると、Eq.(4)を採用された程度の単純化はむしろ自然であるように思われる。

垂直剛性率: 垂直応力 $\bar{\sigma}_n$ と閉塞量 δ の関係は非線型であると共に、閉塞量に限界 δ_m (可能閉塞量) がある。スプリングモデルでは当然のことながら可能閉塞量 δ_m は、 $\bar{\sigma}_n = 0$ の時の開口幅 t_0 に等しい ($\delta_m = t_0$)。閉塞量に限界のある曲線に一つの直線をあてはめて、垂直剛性率を定義するにはいささか無理があり、ここでは Bandis らの次の実験式を採用することにする。

$$\bar{\sigma}_n = \frac{\delta}{a - b\delta} \quad (6)$$

割線垂直剛性率 K を $\bar{\sigma}_n / \delta$ で定義すれば、Eq.(6) から次式を得る。

$$K = \frac{1 + b\bar{\sigma}_n}{a} = \frac{1 + b\bar{\sigma}_{ij} n_i n_j}{a} \quad (7)$$

上式は K の垂直応力依存性を表わしている。 $\bar{\sigma}_n = 0$ の時の K を K_0 と書けば、 $a = 1/K_0$, $b = 1/(t_0 K_0)$ であることは容易に確かめられる。クラックの直径 r が大きくなれば、その開口幅 t_0 (従って可能閉塞量) も比例して大きくなると考えられる。今比例定数を c とし

$$r = ct_0 \quad (8)$$

と仮定する。また同時に r , t_0 の大きいクラックは、その表面粗度 (JRC) を増し、結果として初期垂直剛性率 K_0 も小さい値を取りであろう。今、Eq.(2) との類推から、 K_0 は r に逆比例するとして、 $K_0 = k/r$ と置くことにする。ただし k は実験を定めるべき常数を応力の次元を持つている。すると Eq.(7) は、

$$K = \frac{1}{r} (k + c\bar{\sigma}_{ij} n_i n_j) \quad (9)$$

と書ける。せん断剛性率と同様、Eq.(9) を方向に関して平均化して、平均垂直剛性率を求める。

$$\bar{K} = \int_{\Omega} K E(n) d\Omega = \frac{1}{r} (k + c\bar{\sigma}_{ij} N_{ij}) = \frac{1}{r} k(\bar{\sigma}, N) \quad (10)$$

ただし $k(\bar{\sigma}, N)$ は、応力とクラックの方向分布に依存するスカラー量であり、 $g(\bar{\sigma}, N)$ と同様応力の次元を

持つている。

ろ スプリングモデルによる等価弾性体

$m^{(v)}$ 個のクラックを含む体積 V の岩盤を考える。その基質部分は等方線型弾性体で、またクラックは Eq.(4), (10) のせん断・垂直剛性率を持つスプリングと近似する。またクラック間の相互干渉は無視できるものと仮定する。巨視的な応力テンソル $\bar{\sigma}_{ij}$, 歪テンソル $\bar{\epsilon}_{ij}$ は次式で定義する。

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dv; \quad \bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij} dv \quad (11)$$

巨視的歪 $\bar{\epsilon}_{ij}$ は、弾性コンプライアンス T_{ijkl} を介して巨視的応力 $\bar{\sigma}_{ij}$ に関係づけられる。 T_{ijkl} は、基質部分のコンプライアンス M_{ijkl} とクラックの部分のコンプライアンス C_{ijkl} から合成される²⁾。クラック部分の体積 $V^{(c)}$ が全体積に占める割合は小さく、また基質部分を等方線型弾性体と近似するので、次式を得る。

$$\bar{\epsilon}_{ij} = T_{ijkl} \bar{\sigma}_{kl} = (M_{ijkl} + C_{ijkl}) \bar{\sigma}_{kl} \quad (12)$$

$$M_{ijkl} = \frac{(1+\nu)}{E} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (13)$$

ただし E , ν は基質部分のヤング率とポアソン比であり、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタとする。Eq.(12) を完全なものとするには、 C_{ijkl} を先に定義したせん断・垂直剛性率を用いて定式化すればよい。

この目的のために、単位ベクトル $\hat{x}$ の方向に長さ $x^{(1)}$ の測線 $\bar{ab}$ を走らせる (Fig. 2)。その測線はクラックと $P_1, P_2, \dots, P_N^{(1)}$ の点で交わる。その個数 $N^{(1)}$ は、 $\hat{x}$ と r に関する密度関数 $E(n, r)$ を用いて

$$N^{(1)} = \frac{\pi x^{(1)}}{2} \int_0^\infty r^2 |n_j| E(n, r) d\Omega dr \quad (14)$$

で推定できる。^{1), 2)} クラックへの単位の法線ベクトルが $\hat{x}$ を中心とする微小立体角 $d\Omega$ に入り、かつその直径が r から $r+dr$ に入るクラックを (n, r) - クラックと呼ぶ。Eq.(14) の $N^{(1)}$ のクラックの中で (n, r) クラックの個数 $dN^{(1)}$

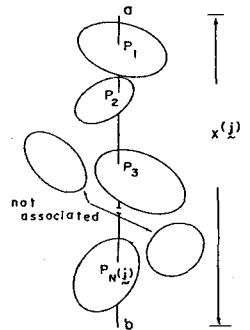


Fig. 2 Scanline parallel to a unit vector j

は

$$dN^{(j)} = \frac{\pi D x^{(j)}}{4} r^2 |n_j| 2E(n, r) d\Omega dr \quad (15)$$

である。(n, r)-クランクが、巨視的応力 $\bar{\sigma}_{ij}$ にさらされると、クランクに垂直な方向とクランクに沿う方向に相対的な変位を生じる。クランクに垂直な相対変位は、

$$\delta_i^{(n)} = \frac{1}{K} \bar{\sigma}_{kl} n_i n_k n_l \quad (16)$$

を表わされ、一方クランクに沿う相対変位は、

$$\delta_i^{(s)} = \frac{1}{G} (\bar{\sigma}_{il} n_l - \bar{\sigma}_{kl} n_i n_k n_l) \quad (17)$$

を表わせる。ただし K, G は Eqs. (10), (4) で定義される垂直、せん断剛性率である。今 $dN^{(j)}$ 個の (n, r)-クランクが Eqs. (16), (17) の相対変位を生じたとすれば、単位ベクトル n の方向の累計の相対変位量は、

$$\sum \delta_i^{(j)} = \frac{\pi x^{(j)}}{4} r^3 \left\{ \left(\frac{1}{K(\bar{\sigma}, N)} - \frac{1}{G(\bar{\sigma}, N)} \right) n_i n_j n_k n_l + \frac{1}{G(\bar{\sigma}, N)} n_j n_l \delta_{ik} \right\} \bar{\sigma}_{kl} \quad (18)$$

を計算される。ただし $\delta_i = (\delta_i^{(m)} + \delta_i^{(s)})$ とする。体積 V 中に含まれる全てのクランクを考慮するためには、Eq. (18) を r について $0 \sim \infty$ まで、また方向について全立体角 Ω を積分すればよい。すると、

$$\frac{\sum \delta_i^{(j)}}{x^{(j)}} = \left\{ \left(\frac{1}{K(\bar{\sigma}, N)} - \frac{1}{G(\bar{\sigma}, N)} \right) F_{ijk}^{(3)} + \frac{1}{G(\bar{\sigma}, N)} \delta_{ik} F_{jkl}^{(3)} \right\} \bar{\sigma}_{kl} \quad (19)$$

を得る。ただし、 $F_{ij}^{(3)}, F_{ijkl}^{(3)}$ は、それぞれ Eq. (1) を m とすると二階、四階のクランクテンソルである。

クランクの相対変位が及ぼす全歪成分への寄与は、

$$\bar{\epsilon}_{ij}^{(c)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sum \delta_i^{(j)}}{x^{(j)}} + \frac{\sum \delta_j^{(i)}}{x^{(i)}} \right) \quad (20)$$

を評価できる。弾性コンプライアンス C_{ijkl} の満足すべき対称性は

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad (21)$$

を考慮して、Eq. (19) を Eq. (20) に用いれば、 C_{ijkl} と (2) 式を得る。

$$C_{ijkl} = \left\{ \left(\frac{1}{K(\bar{\sigma}, N)} - \frac{1}{G(\bar{\sigma}, N)} \right) F_{ijk}^{(3)} + \frac{1}{4G(\bar{\sigma}, N)} (\delta_{ik} F_{jkl}^{(3)} + \delta_{jk} F_{il}^{(3)} + \delta_{jl} F_{ik}^{(3)} + \delta_{il} F_{jk}^{(3)}) \right\} \quad (22)$$

今 $h(\bar{\sigma}, N) = g(\bar{\sigma}, N)$ を仮定すれば、Eq. (22) は二階のクランクテンソル $F_{ij}^{(3)}$ のみを含むものに簡略化される。クランクを開口した penny-shaped クランクと近似して、クランクの影響を弾性学的に評価すると、 C_{ijkl} は

$$C_{ijkl} = \frac{1}{4D} (\delta_{ik} F_{jkl}^{(3)} + \delta_{jk} F_{il}^{(3)} + \delta_{jl} F_{ik}^{(3)} + \delta_{il} F_{jk}^{(3)}) \quad (23)$$

$1/D = B/(3\pi E)$

を表わせる。⁵⁾ (クランクを挿入した石膏モデルの実験からその適用性についても検討されている。) $h(\bar{\sigma}, N) = g(\bar{\sigma}, N) = D$ が仮定できれば Eq. (22) = Eq. (23) となり、従って Eq. (23) は Eq. (22) の特別な場合であると言える。Bandis らの実験結果を見ると、 $h(\bar{\sigma}, N) \approx g(\bar{\sigma}, N)$ よりむしろ、 $h(\bar{\sigma}, N) \gg g(\bar{\sigma}, N)$ となるようである。すると Eq. (22) は、

$$C_{ijkl} = \frac{1}{4g(\bar{\sigma}, N)} (\delta_{ik} F_{jkl}^{(3)} + \delta_{jk} F_{il}^{(3)} + \delta_{jl} F_{ik}^{(3)} + \delta_{il} F_{jk}^{(3)} - 4F_{ijkl}^{(3)}) \quad (24)$$

と簡略化できる。ここに $g(\bar{\sigma}, N)$ は、その定義式 (4) から知られるように一定値ではなく、一般的には応力 $\bar{\sigma}$ とクランクの方向分布 N に依存する変数であることに注意しなければならない。すなわち全体の応力レベルが高くなると、 $g(\bar{\sigma}, N)$ も大きくなり、結果として全歪成分のクランクの寄与は相対的に減少するはずである。

4 等価多孔質媒体

節理性岩盤を δ と ϵ 等価多孔質媒体を近似する一般的な手法について詳しく報告している⁶⁾。それによると、節理性岩盤の異方透水テンソル k_{ij} は次式で表わされる。

$$k_{ij} = \lambda (P_{kk} \delta_{ij} - P_{ij}) \quad (25)$$

ただし P_{ij} は、

$$P_{ij} = \frac{\pi D}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_\Omega r^2 t^3 n_i n_j E(n, r, t) d\Omega dr dt \quad (26)$$

で定義される二階の対称テンソルである。そこを代入は無次元の比例常数であって、クランクの長さ D が十分で

クラックの相互の連結が保たれていれば、 $1/2$ に等しい。Eq.(25)の透水テンソルはFEMによる数値実験との結果とも調和的であることから、節理性岩盤の透水性を支配するクラックの幾何学性はEq.(26)の P_{ij} をその本質とらえていいものと考えられる。

しかしよく知られているように、岩盤の透水性は巨視的応力と無関係ではなく、たとえば深所の岩盤を浅所のそれと比較すると、透水性は著しく異なるはずである。クラックへの有効垂直応力 $\bar{\sigma}_{ij}'$ の増加によって、クラックの厚さは $\bar{\sigma}_{ij}'=0$ の時の t_0 から減り、最終的には $t=0$ へと収束する。すなわちEq.(26)における t は、巨視的有効応力 $\bar{\sigma}_{ij}$ の関数であると理解されなければならない。Eq.(10)を用いれば、巨視的有効応力 $\bar{\sigma}_{ij}$ の場に置かれたクラックの厚さは、

$$t = t_0 - \frac{\bar{\sigma}_{ij}'}{K} = t_0 \left(1 - \frac{1}{k(\sigma, N)} \bar{\sigma}_{ij}' n_i n_j \right) \quad (27)$$

と書ける。従ってその三乗は、

$$t^3 = t_0^3 \left\{ \frac{1}{k^3(\sigma, N)} \bar{\sigma}_{ij}' \bar{\sigma}_{kl}' n_i n_j n_k n_l + \frac{3/c}{k^2(\sigma, N)} \bar{\sigma}_{ij}' \bar{\sigma}_{kl}' n_i n_j n_k n_l + \frac{1}{k^3(\sigma, N)} \bar{\sigma}_{ij}' \bar{\sigma}_{kl}' \bar{\sigma}_{mn}' n_i n_j n_k n_l n_m n_n \right\} \quad (28)$$

となる。Eq.(28)の t^3 をEq.(24)の P_{ij} の定義式に用いれば

$$P_{ij} = \left\{ \frac{1}{c^3} F_{ij}^{(5)} - \frac{3/c^2}{k(\sigma, N)} \bar{\sigma}_{kl}' F_{ijkl}^{(5)} + \frac{3/c}{k^2(\sigma, N)} \bar{\sigma}_{kl}' \bar{\sigma}_{mn}' F_{ijklmn}^{(5)} - \frac{1}{k^3(\sigma, N)} \bar{\sigma}_{kl}' \bar{\sigma}_{mn}' \bar{\sigma}_{op}' F_{ijklmnop}^{(5)} \right\} \quad (29)$$

を得る。ただし式中の $F_{ij}^{(5)}, F_{ijkl}^{(5)}, \dots$ などは $m=5$ とするEq.(1)の二、四、...階のテンソルに他ならない。実用上はEq.(29)の右辺第二項までを残して、 P_{ij} を

$$P_{ij} = \frac{1}{c^3} \left\{ F_{ij}^{(5)} - \frac{c}{k(\sigma, N)} \bar{\sigma}_{kl}' F_{ijkl}^{(5)} \right\} \quad (30)$$

で表わしておけば十分であろう。巨視的有効応力が大きくなれば、同一のクラックパターンであっても、異なる透水テンソルに導かれる。すなわちクラックテンソル $F_{ij}^{(5)}$ が等方であっても、 P_{ij} はかならずしも等方とならず、その結果異方透水性を示すこともあり得ることに注意しなければならない。

Eqs.(29),(30)における巨視的有効応力をどのようなものに取り替へれば、岩盤力学の根幹にかけられる重要な問題である⁸⁾。しかしここでは、クラックが十分に連結された場合に限定することによって、巨視的有効応

力を次式で定義しておく。

$$\bar{\sigma}_{ij}' = \bar{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma} \delta_{ij}; \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{V(c)} \int_V(c) \sigma \, dv \quad (31)$$

ただし $V(c)$ はクラックの間隙体積で、 σ はクラックの局所的間隙水圧である。

5 一般化されたクラックテンソルの決定法

クラックテンソルを用いて節理性岩盤をそれと力学的に等価な連続体、多孔質媒体へと変換できることが示された。残る問題は、実岩盤において一般化されたクラックテンソルを決定することである。これについては、小田らの論文をすでに実例をあげて詳しく論じられているので、ここではその概要を述べるに止める。

Eq.(1)の一般化されたクラックテンソルは、次の二つの量を与えられるれば計算できる。

1) クラックの方向分布の密度関数 $E(c)$: 従来の地質調査では、クラックへの法線方向はSchmidtネット上に投影して示されるが、表現方法を若干変更することによって目的は達成される。

2) クラックと崖面(掘削面)との交線長さと、単位長さの測線と交わるクラックの数。

上記諸量はいずれも普通の岩盤調査により容易に決定でき、特別な調査を必要としない点を強調しておく。

参考文献

- 1) Oda, M. (1984): Mechanics of Materials 3, 119-129.
- 2) Oda, M., Suzuki, K. and Maeshibu, T. (1984): Soils and Foundations 24(3), 27-40.
- 3) Goodman, R.E. (1974): Proc. 3rd Cong. Int. Soc. Rock Mech., Denver, 1(A), 127-140.
- 4) Barton, N.R. and Choubey, V. (1977): Rock Mech. 10, 1-54.
- 5) Bandis, S., et al. (1983): Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. 20, 249-268.
- 6) 小田, 前浜, 羽出山, 数納 (1984): オビ回岩の力学国内シンポジウム論文集, 121-126.
- 7) Long, J.C.S., et al. (1982): Water Resources Research 18(3), 645-658.
- 8) Robin, P.Y. (1973): J.G.R. 78(14), 2434-2437.

(5) GENERALIZED CRACK TENSOR AND ITS APPLICATION TO ROCK MECHANICS

By Masanobu Oda

ABSTRACT

Elastic compliance and permeability tensors for jointed rock masses are formulated in terms of the generalized crack tensor $F^{(m)}$ with the following definition;

$$F^{(m)} = \frac{\pi \rho}{4} \int_0^\infty \int_\Omega r^m \underline{n} \underline{n} \cdots \underline{n} E(\underline{n}, r) d\Omega dr$$

where ρ = volume density of cracks,

r = size of a crack (diameter),

$\underline{n}$ = unit vector normal to a crack,

$E(\underline{n}, r)$ = probability density of cracks,

Ω = solid angle, and

m = positive integer.

Each crack is treated as a parallel opening connected by two springs whose normal and shear stiffness are determined by taking into account the experimental results by Barton et al. (1972) and Bandis et al. (1983). By means of summing up displacement jumps associated with cracks along a given scanline, the elastic compliance C_{ijkl} due to the presence of cracks is formulated as

$$C_{ijkl} = \left\{ \left(\frac{1}{k(\underline{\sigma}, \underline{N})} - \frac{1}{g(\underline{\sigma}, \underline{N})} \right) F_{ijkl}^{(3)} + \frac{1}{4g(\underline{\sigma}, \underline{N})} (\delta_{ik} F_{jl}^{(3)} + \delta_{jk} F_{il}^{(3)} + \delta_{jl} F_{ik}^{(3)} + \delta_{il} F_{jk}^{(3)}) \right\}$$

where $F_{ij}^{(3)}$, $F_{ijkl}^{(3)}$ = second and fourth rank crack tensors with $m=3$,

$k(\underline{\sigma}, \underline{N})$ = normal stiffness depending on $\underline{\sigma}$ and $\underline{N}$, and

$g(\underline{\sigma}, \underline{N})$ = shear stiffness depending on $\underline{\sigma}$ and $\underline{N}$.

Each crack is also treated as a parallel opening with a aperture t which depends on normal stress acting on it. Adopting the cubic law for laminar flow of fluids through open cracks consisting parallel planar plates, an equivalent permeability tensor k_{ij} is formulated as follows:

$$k_{ij} = \lambda (P_{kk} \delta_{ij} - P_{ij})$$

$$P_{ij} = \left\{ \frac{1}{c^3} F_{ij}^{(5)} - \frac{3/c^2}{k(\underline{\sigma}, \underline{N})} \bar{\sigma}_{kl} F_{ijkl}^{(5)} + \frac{3/c}{k^2(\underline{\sigma}, \underline{N})} \bar{\sigma}_{kl} \bar{\sigma}_{mn} F_{ijklmn}^{(5)} - \frac{1}{k^3(\underline{\sigma}, \underline{N})} \bar{\sigma}_{kl} \bar{\sigma}_{mn} \bar{\sigma}_{op} F_{ijklmnop}^{(5)} \right\}$$

where $\lambda = 1/12$ when the rock mass is fully disintegrated by many cracks,

c = dimensionless constant,

δ_{ij} = Kronecker's delta,

$F_{ij}^{(5)}$, $F_{ijkl}^{(5)}$ = second and fourth rank crack tensors with $m=5$, and

$\bar{\sigma}_{ij}$ = stress tensor.