

(38) トンネル問題における三次元逆解析法

大阪大学工学部 ○久 武 勝 保

大阪大学工学部 伊 藤 冨 雄

大阪大学大学院 大 田 哲 也

1. 結 論

最近、NATMの普及と相まって、現場計測が行われるようになり、覆工や周辺地山の変位計測結果を基に、覆工、地山の応力及び地山の力学定数を逆解析し、以後の設計・施工に役立たせる試みが行われるようになった^{1) 2)}。従来提案されている逆解析法は、大別して直接定式化法と逆定式化法に分類されるが、そのいずれにおいてもくり返し解析を基本とし、二次元解析が行われている。すなわち、三次元の逆解析結果は示されておらず、たとえ従来の手法を三次元問題に拡張するにしても、くり返し解析を必要とする事から、計算時間・コストの面で実際への適用は困難となる。一方、トンネル解析で必要となる地山応力は、既に打設した覆工の地圧の影響を受けている切端での掘削解放応力である。すなわち、逆解析においては、この応力と地山の力学定数を同時に求める必要がある。

本論文においては、トンネル覆工内面の変位計測結果のみを用い、覆工の応力・地圧を逆解析して覆工の施工管理を直接行うと同時に、地山の力学定数及び切端掘削時に解放する応力も、上記変位のみにより、くり返し解析をせずに逆解析し、フィードバックシステムによって、トンネルの設計、施工及び施工管理を合理的に行う手法を示すものである。

2. 三次元逆解析法の手順の概説

通常の施工では、図-1に示す様に、切端掘削後、トンネル内面に1次覆工を施工する、という手順がくり返される。本手法では、この様な施工手順に対応した逆解析を行うが、その場合、地山と覆工を分離し、まず、覆工内面の計測変位を用いて覆工に対する逆解析を行い、覆工の応力、地圧及び覆工外面の変位(=トンネル内面変位)を求めておく。次に、以上で得られた覆工地圧とトンネル内面変位を用いて、地山に対する逆解析を行い、地山の力学定数と切端での掘削解放力を求める。なお、覆工は弾性体、地山は弾性体、又は粘弾性体とする。また、地山のポアソン比 ν はあらかじめ仮定する必要があるが、この妥当性については後で示す。

3. 覆工に対する逆解析

いま、図-2に示す様に、覆工のみを取り出し、FEMにおける節点変位 U と、覆工外面に作用する節点外力 F_0 との関係を示せば、次式の様になる。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_c \\ U_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここに、添字 i, c, o はそれぞれ覆工の内面、内部及び外面の節点を示し、 K_{ij} ($i, j = 1 \sim 3$)は、覆工の部分剛性マトリックスである。通常の解析では、 F_0 を既知として変位を求めるが、上式では、現場計測による U_i のみが既知である。式(1)のはじめの二つの式を取り出して変形すると、次式が得られる。

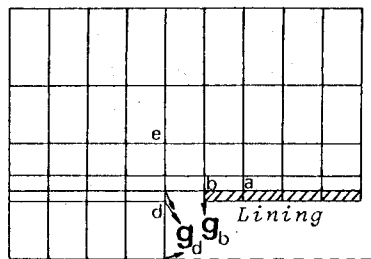


図-1 トンネル縦断面

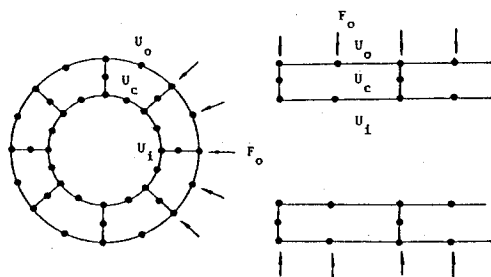


図-2 覆工の変位 U 及び節点外力 F_0

$$\begin{Bmatrix} U_c \\ U_0 \end{Bmatrix} = -[K_a]^{-1}[K_b]\{U_i\}, \text{ここに、} [K_a] = \begin{bmatrix} K_{12} & K_{13} \\ K_{22} & K_{23} \end{bmatrix}, [K_b] = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{bmatrix} \quad (2)$$

覆工の節点数を N とすると、図-2 のような要素分割では、 $N_i = N_0$ であるので、未知変位の数は、 $3(N_c + N_0)$ となるが、一方、式(2)の方程式の数も、 $3(N_c + N_0)$ であるから、式(2)は解くことができる。また、 N_i が N_0 より大であれば、 U_c 、 U_0 は最小自乗法によって、以下の様に求められる。

$$\begin{Bmatrix} U_c \\ U_0 \end{Bmatrix} = -[K_c]^{-1}[K_d]\{U_i\}, \text{ここに、} [K_c] = [K_a]^T[K_a], [K_d] = [K_a]^T[K_b] \quad (3)$$

以上により、全ての節点変位が既知となるので、これを式(1)の第3式に代入することより、覆工外面 S_0 に作用する節点力 F_0 が求められ、さらに、FEMにおける変位と応力の内挿関数 (M_1 、 M_2) を用いれば、覆工地圧 p_0 も容易に求められる。

$$\{F_0\} = [K_e] \begin{Bmatrix} U_i \\ U_c \\ U_0 \end{Bmatrix}, \{p_0\} = [M]^{-1}[K_e] \begin{Bmatrix} U_i \\ U_c \\ U_0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ここに、 $[K_e] = [K_{31} \ K_{32} \ K_{33}]$ 、 $[M] = \int_{S_0} [M_1]^T [M_2] dS_0$

また、全節点変位が既知なので、これを、変位～ひずみ式、ひずみ～応力式に適用することより、覆工応力も容易に算出される。

すなわち、覆工内面の計測変位から、覆工の応力、地圧等が一義的に決定されるわけである。

4. 弾性地山に対する逆解析

以下では、3. で求めた解析結果を用いて、地山に対する逆解析を行う。

トンネルの施工手順を考慮して、切端掘削時における地山の剛性方程式を表わせば、以下の様になる。

$$[K_f] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_d \\ f_e \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ここに、 u_1 は覆工に対する逆解析から既知となっているトンネル内面の節点変位 ($u_1 = U_0$)、 u_2 は u_1 以外の節点変位、添字 a 、 b は、それぞれ、覆工外面に接するトンネル内面節点のうち、通常の順解析 (Sequence Analysis) で掘削解放力 g を作用させない節点、及び作用させる節点、添字 d は g を作用させる節点のうち、覆工外面と節点を共有しない地山節点、添字 e は上記以外の地中節点を示す (図-1 参照)。上記定義により、力の釣り合い関係から以下の関係が容易に導かれる。

$$f_a = -F_{0a}, f_b = g_b - F_{0b}, f_d = g_d, f_e = 0 \quad (6)$$

地山の弾性係数を E とすると、 $[K_f] = E[\bar{K}_f]$ と変形できるので、これを式(6)に代入して両辺に $[\bar{K}_f]^{-1} / E$ を乗じた後、 $f_e = 0$ であるので f_e に関するマトリックス成分を $[\bar{K}_f]^{-1}$ から除き、これを $[K_i]$ とすると、

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [K_i] \begin{Bmatrix} f_a/E \\ f_b/E \\ f_d/E \end{Bmatrix} \quad (7)$$

既知量 f_a をマトリックス $[K_i]$ の中に入れたのち、既知変位 u_i に関する方程式を取り出せば、式(7)は、

$$\{u_i\} = [K_h] \begin{Bmatrix} 1/E \\ f_b/E \\ f_d/E \end{Bmatrix} \quad (8)$$

と表現できる。ここで、既知変位 u_i の数 (M_n) と未知の掘削解放力 g の数 (M_u) の関係が、次の条件

$$M_n \geq M_u + 1 \quad (9)$$

を満足しておれば、式(8)は次の様に解く事ができる。

$$\begin{Bmatrix} 1/E \\ f_b/E \\ f_d/E \end{Bmatrix} = \left[[K_h]^T [K_h] \right]^{-1} [K_h]^T \{u_i\} \quad (10)$$

f_b 、 f_d の値は、上式で求められた f_b/E 、 f_d/E に、同じく上式で得られた E を乗じて求められる。

すなわち、地山の弾性係数 E と切端での掘削解放力 g が、覆工内面変位のみから、くり返し解析をせずに求められたわけである。

5. 粘弾性地山に対する逆解析

粘弾性地山においても、切端掘削直後における逆解析は 4. で示したと同一である。以下では、クリープ関数 $\phi(t)$ を求める手法を示す。地山が時間依存性を示せば、トンネル内面に作用する覆工内面圧の反力 $-F_0$ は経時的に変化するので、式(6)から明らかな様に、 f_a 、 f_b も経時的に変化する。そこで、式(8)において、 f_a をマトリックス $[K_h]$ の外に出し、式(6)を考慮して式(8)を変形すると次式を得る。

$$\{u_i(t)\} = [K_j] \begin{Bmatrix} -\int_0^t \phi(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} F_{0a}(\tau) d\tau - \phi(t) F_{0a}(0) \\ \phi(t) g_b - \int_0^t \phi(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} F_{0b}(\tau) d\tau - \phi(t) F_{0b}(0) \\ \phi(t) g_d \end{Bmatrix} \quad (11)$$

上式の積分を差分近似し、2、3 の演算の後、 $\phi(t)$ は次式により順次求められる。

$$\phi(t_{n+1}) = \left[\{A\}^T \{A\} \right]^{-1} \{A\}^T \left[\begin{Bmatrix} u_i(t_{n+1}) \end{Bmatrix} + [K_j] \begin{Bmatrix} B(t_{n+1}) \end{Bmatrix} \right], \quad t_1 = 0, \quad t_{n+1} = t \quad (12)$$

ここに、 $\{A\}$ は、 F_{0a} 、 F_{0b} 、 g_b 、 g_d により決定され、また、 $\{B(t_{n+1})\}$ は、時間 t_{n+1} 以前のクリープ関数の値と、 F_{0a} 、 F_{0b} とによって決定されるベクトル量である。

6. 考 察

実際の施工では、切端のすぐ手前で 1 次覆工を施工し、その後切端を掘削する。そこで、弾性地山について、1 掘削に起因する覆工の応力、変位を通常の順解析により求めておき、次にこの様にして得られた変位のうち、覆工内面変位のみを本手法に与えて逆解析を行い、覆工応力、地山の弾性係数及び掘削解放節点力を求め、これらが順解析での諸量に対応するかについて、以下考察を加える。

図-3 は、本解析で用いたトンネル周辺の要素分割図であり、トンネル掘削幅 $D = 10m$ 、1 掘削長 $2.5m$ 、覆工厚 $20cm$ 、地山の初期応力は、水平 $\sigma_h = 10kgf/cm^2$ 、鉛直 $\sigma_v = 20kgf/cm^2$ 、地山と覆工の弾性係数 E 、 E_1 、及びポアソン比 ν 、 ν_1 は、 $E = 5,000kgf/cm^2$ 、 $E_1 = 200,000kgf/cm^2$ 、 $\nu = 0.3$ 、 $\nu_1 = 0.15$ である。

図-4 は、トンネル横断面内のクラウン ($\theta = 0^\circ$) における覆工内面円周方向応力 σ_θ について、順解析

と逆解析 (Back analysis) の結果を比較したものであり、これから、本手法は覆工応力を精度良く算定できることがわかる。また、覆工の一部分に着目し、その部分の覆工内面変位のみを与えることによって、その部分の覆工応力を十分な精度で算定できることが確認できた^{1), 3)} ので、落盤に対する安全のために覆工の上半のみ計測を行ったり、あるいは一部分の覆工が特異な挙動を示せば、その部分のみの変位計測を行い、これから計測部の覆工応力を算定することも可能である。

表-1は、切端掘削時に解放する S_2 、 S_3 断面での節点力について、逆解析から得られた結果の誤差を表わしたものである。ただし、表中、 F_s 、 F_b

はそれぞれ、順解析及び逆解析から得られる解放節点力である。この表を見ると、解放節点力も、本解析により、非常に精度良く算定されることがわかる。また、逆解析から算定された地山の弾性係数は、 $4,999.7 \text{ kgf/cm}^2$ であり、順解析で用いたその値 $5,000 \text{ kgf/cm}^2$ に非常に近い。ところで、本解析では、地山のポアソン比 ν を仮定する必要がある。そこで、まず、真の $\nu = 0.3$ に対し、 $\nu = 0.4$ を仮定し、逆解析を行って E 、 F_b を求め、次に、これら E 、 F_b 、 $\nu = 0.4$ を用いて再度順解析を行い、クラウンでの覆工内面応力について、当初行った順解析の結果と比較したのが図-5である。両者の結果は非常に良く一致している。これから、実際の地山の ν と異なった ν を仮定して逆解析を行い、覆工応力を算定しても良い事がわかるが、これは、同一覆工内面変位を与える (E 、 F_b 、 ν) の組がいく通りもある事から容易に理解される。

参考文献

- 1) Hisatake and Ito : Back Analysis Methods to Tunnel Linings, Proc. Int. Symp. Field Measure. Geomech. , 1983.
- 2) Sakurai : Displace. Measure. Associated with the Design of Underground Openings, ditto.
- 3) 久武・伊藤・仲久保 : トンネル覆工の施工管理に関する研究、第38回土木年講第3部、1983.

表-1 逆解析で求められた解放節点力の誤差

$$100(F_s - F_b)/F_s \text{ [Error(\%)]}$$

θ°	Section S_2			Section S_3		
	Axial	Hori.	Verti.	Axial	Hori.	Verti.
0	1.01	0.00	0.46	0.09	0.00	-0.01
45	-1.88	-1.27	-1.12	-0.10	0.05	0.00
90	0.87	1.44	4.24	0.11	0.12	0.21
133.5	-0.46	-0.19	0.30	0.05	0.00	0.03
180	0.69	0.00	0.62	0.09	0.00	-0.01
226.5	-0.46	-0.19	0.30	0.05	0.00	0.03
270	0.87	1.44	4.24	0.11	0.12	0.21
315	-1.88	-1.27	-1.12	-0.10	0.05	0.01

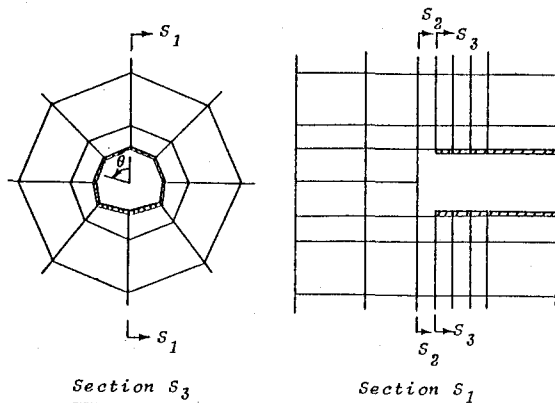


図-3 トンネル周辺の要素分割図

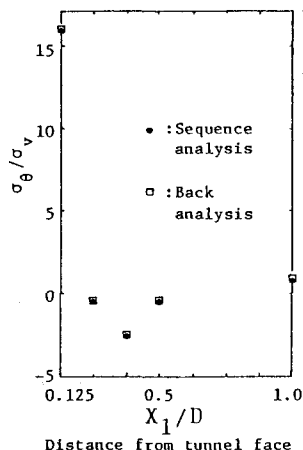


図-4 順解析結果と逆解析結果の比較

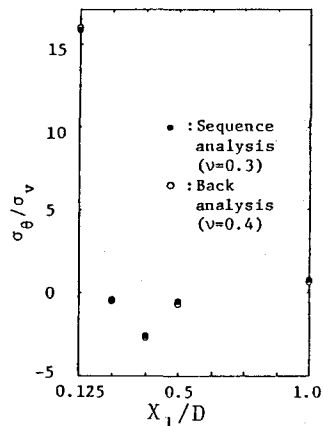


図-5 ν を違えて逆解析した結果と順解析結果の比較

(38) Three Dimensional Back analysis Method
for a tunnel

M.HISATAKE, T. ITO and T. OTA

Dep. of Civil Engineering, Osaka University

In this paper, three dimensional back analysis method is newly proposed for a tunnel in order to construct the tunnel safely and reasonably.

Mechanical constants of the ground around the tunnel, stresses which will be released at the excavation of the tunnel face and also stresses in the linings are determined three-dimensionally with only convergence data on the linings.

This approach presented here may be divided into two parts. In the first part, stresses, displacements and earth pressures of the linings are analyzed with convergence data, and in the second part unknowns on the ground are analyzed with the values obtained in the previous part.

By constituting a feedback system based on this method, it is possible not only to assess the tunnel stability but also to determine reasonably such executive conditions as linings thickness, excavation length etc..