

(31) 一軸圧縮におけるひずみ分布と強度に関する実験と考察

日本大学工学部 田野 久貴
 同上 北川 正幸
 同 大学院 森田 英彦
 東北大学工学部 佐武 正雄

1. まえがき

本文は、実験誤差の一つである荷重の偏心を考慮した確率モデルを提案し、圧縮応力下の寸法効果を従来と異なる観点から論じたものである。今回行った金属性円柱や石膏による寸法の異なる試験片の圧縮歪の分布には、明らかに荷重の偏心が見られ、程度の差はあっても一般に行われている試験においてこの現象が生じているものと考えられる。これによる歪分布は材料の強度に大きな影響を及ぼすと考えられ、これを確率的に考察することにより、理想的な圧縮状態すなわち一様な圧縮歪分布を前提とした“真の寸法効果”と“見掛けの寸法効果”と異なることを明らかにするものである。

2. 圧縮試験における荷重の偏心

2.1 荷重の偏心による歪分布

圧縮試験における試験上の問題点として主なものは、第一は載荷面附近の応力集中や拘束の問題であり、これについて 図-1 偏心圧縮による歪分布はすでに多くの研究がある。第二は荷重の偏心問題であるが、使用する試験装置等によっても異なると考えられ、この点に関する報告は少ないようである。実験誤差としてこれをすべてを考慮することが望ましいが、ここでは後者のみについて考察する。

さて、十分剛な載荷板の偏心による線形弾性体の曲げモーメント(図-1)の影響については球座の影響をも含めた報告がある。半径 R の円形断面において偏心軸に直交し x 軸をとると(図-2(a))、断面上の応力は次式で示される。

$$\sigma = \frac{P}{\pi R^2} + \frac{Pe}{I} x = \sigma_0 + \frac{4Pe}{\pi R^4} x \quad (1)$$

ここに、 P ；圧縮荷重、 σ_0 ；平均応力、 e ；圆心からの偏心距離、 I ；断面2次モーメントである。(1)式より偏心量 e は次式で示される。

$$e = \frac{R}{4} \cdot \frac{\epsilon_{\max} - \epsilon_0}{\epsilon_0} \quad (2)$$

ここに、 ϵ_0 ；平均歪、 $\epsilon_{\max}$ ；最大歪である。なお、 $\epsilon_{\max}$ ($\epsilon_{\min}$) すなわち最大(最小)歪は図-2(b)に示すように、同一断面上の3点の実測歪より計算される。

(2)式を変形すると次式が得られる。

$$\frac{\epsilon_{\max} - \epsilon_0}{R} = 4 \epsilon_0 \cdot \frac{e}{R} \cdot \frac{1}{R} \quad (3)$$

ここで e/R を偏心率と定義すると、歪分布は偏心率に比例し半径 R に反比例する。一方、偏心荷重を受ける弾

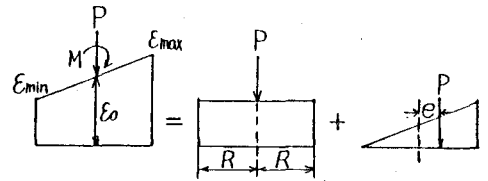


図-1 偏心圧縮による歪分布

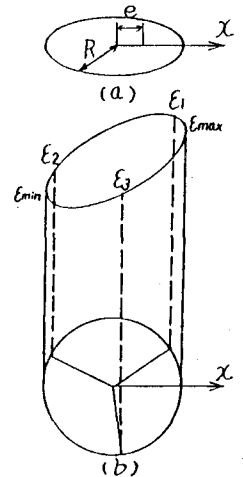


図-2

性体の歪エネルギーは、同一荷重下では偏心量に比例し、歪エネルギーの高い不安定な状態にあることは簡単に考察される。したがって、荷重が増加すると歪エネルギーのより小さな安定な状態に移行するために偏心量は減少することになる。図-3にアルミニウム製のモデル円柱の偏心率(e/R)の結果を示すが、応力の増加につれて e/R は減少し、また直径の大きい方が e/R は小さいことがわかる。

2.2 実験誤差を考慮した破壊の確率モデル

一般に行われる実験によって得られる実験値は観測値であり、これには実験誤差が含まれる。この点についてはすでに論じられている²⁾。すなわち、材料固有の破壊歪が平均値 $\bar{\epsilon}_m$ 、分散 s_m^2 をもつ正規分布 $N(\bar{\epsilon}_m, s_m^2)$ にしたがい、また、実験誤差のずれが同様に $N(\bar{\epsilon}_e, s_e^2)$ の正規分布にしたがうと仮定すると、観測される歪 ϵ_a は次に示す正規分布にしたがう。

$$\epsilon_a = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{s_m^2 + s_e^2}} \exp \left\{ -\frac{(\epsilon - \bar{\epsilon}_m)^2}{2(s_m^2 + s_e^2)} \right\} \quad (4)$$

すなわち、観測値(実験値)の平均値は材料固有の平均値に一致し、その分散は材料と実験誤差のずれずれの分散の和に等しいことがわかる。

一方、圧縮下における破壊のうち分離破壊の寸法効果は、従来の最弱リンクモデルでは説明できない点の多いことを報告³⁾したが、これを考慮して、本文では破壊歪を並列モデルで考察する。すなわち、破壊歪の確率分布関数を $F(x)$ とすると、 n 個の並列要素よりなるモデルの分布関数 $F_n(x)$ は次式で示される。

$$F_n(x) = \{F(x)\}^n \quad (5)$$

破壊時の圧縮歪を平均値で代表し、 $F(x)$ として標準正規分布 $N(0, 1)$ を用いると、破壊歪 $\psi(n)$ は次式を満足する x として与えられる。

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \varphi(n) \quad x = \varphi(n) \quad (6)$$

$$\text{ここに } \varphi(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n} - \frac{1}{2}$$

要素数 n を与えて行った破壊歪 $\psi(n)$ の数値計算結果を表-1に示す。また、材料の破壊歪の分布が正規分布 $N(\bar{\epsilon}_m, s_e^2)$ にしたがうとすると、この場合の破壊歪 s_a は(6)式より次式で示される。

$$\epsilon_a = \bar{\epsilon}_m + \varphi(n) s_a \quad (7)$$

一方、得られる実験値の標準偏差には、(4)式により実験誤差が含まれるから $s_a = \sqrt{s_m^2 + s_e^2}$ とおくと(7)式は次式のようになる。

$$\epsilon_a = \bar{\epsilon}_m + \varphi(n) s_a = \bar{\epsilon}_m + \varphi(n) \sqrt{s_m^2 + s_e^2} \quad (8)$$

3. 偏心率と寸法効果

ここで(8)式の実験誤差による分散 s_e^2 を、偏心の点から検討する。先にも述べたように、圧縮時には荷重の偏心による歪勾配が生じる。図-4に示すように試験片が角度 α だけ傾いて圧縮さ

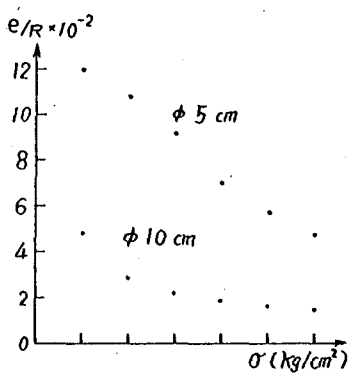


図-3 偏心率 e/R の実験結果

要素数 n	2	4	8	10	50
$\psi(n)$	0.564	0.029	0.424	1.539	2.249
$\varphi(n)$	0.207	0.341	0.417	0.433	0.486

表-1

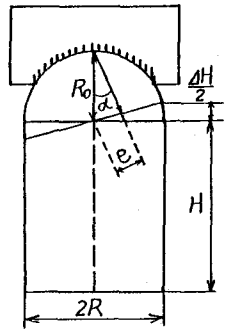


図-4 回転による偏心

れたとする。このとき生じる偏心率 e は次式で示される。

$$e = R_0 \sin \alpha \approx R_0 \alpha \quad (9)$$

ここに R_0 は球座(あるいは回転中心からの)半径である。

一方、半径 R 、高さ H の試験片で、両端面の平行度に高さ ΔH だけの誤差が生じるとする。この ΔH は高さ H に比例すると仮定する($\Delta H = D \cdot H$)と、角度 α は次式で示される。

$$\alpha = \frac{\Delta H}{2R} = \frac{DH}{2R} \quad (10)$$

ここに D :比例定数

(9), (10)式より偏心率 e/R は次式となる。

$$e/R = D \lambda \frac{R_0}{R} \quad (11)$$

ここに $\lambda (= H/2R)$ は細長比である。

したがって、偏心率(e/R)は細長比一定で同一球座を用いた場合には、試験片の半径に反比例する。先の実験結果(図-3)はこの傾向を示している。

さて、端面の平行度に関する誤差 D が正規分布 $N(0, s_D^2)$ に従うと仮定すると、(11)式の e/R も正規分布に従う。一方、(2)式を変形し、最大歪 ε_{max} を偏心率 e/R で表わし(11)式を代入すると次式を得る。

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_0 (1 + 4 \lambda \frac{R_0}{R} D) \quad (12)$$

破壊歪として ε_{max} を用いると、これも正規分布に従い、したがってその分散 s_{ε}^2 は次式で示される。

$$s_{\varepsilon}^2 = (4 \lambda \varepsilon_0 \frac{R_0}{R})^2 s_D^2 \quad (13)$$

(13)式を(8)式に代入して、 $\bar{\varepsilon}_m = \varepsilon_0$ とおくと

$$\varepsilon_a = \bar{\varepsilon}_m \left\{ 1 + \psi(n) \sqrt{s_D^2 + (4 \lambda \frac{R_0}{R})^2 s_D^2} \right\} \quad (14)$$

材料固有の歪のバラツキに比べて偏心によるものが大きい

場合には(14)式は次式で近似される。

$$\varepsilon_a \approx \bar{\varepsilon}_m \left\{ 1 + 4 \psi(n) \lambda \frac{R_0}{R} s_D \right\} \quad (15)$$

強度はこの(14)式の両辺にヤング係数 E を乗ることによって得られる。

したがって、観測値としての強度は偏心によって材料固有の強度

($\sigma = \bar{\varepsilon}_m E$)より大きく観測されることになる。

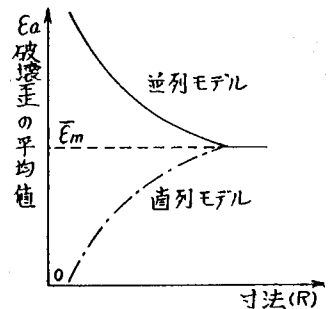


図-5 破壊歪の確率モデルによる比較(模式図)

4. 考 察

4.1 寸法効果の"飽和現象"

材料固有のバラツキに比べて実験誤差のバラツキが大きい場合の近似式である(15)式の第2項は、細長比(λ)一定とすると、寸法が増加するにつれてゼロに近づく圧縮強度は一定値($\sigma = \bar{\varepsilon}_m E$)

に落ち、試験片直径が $1m$ を越えるような場合の寸法効果の飽和現象と傾向が一致する。また、細長比の影響も考慮され、たとえば細長比 λ が小さく高さの小さい試験片ほど寸法効果が顕著に現われる。また、直径($2R$)

直径	平均歪	偏心率	偏心率	最大歪	強度
cm	$\varepsilon_0(\mu)$	$e(mm)$	e/R	$\varepsilon_{max}(\mu)$	kg/cm ²
5	2570	0.118	0.047	3030	175.0
10	2340	0.146	0.029	2600	168.4

表-2 石膏試験片による実験結果

を一定とし細長比を大きくすると強度は増加することになり、分離型破壊の実験結果³⁾と類似の傾向にある。

材料固有の破壊歪の分散 s_m^2 が実験誤差の分散 s_d^2 に比べて無視できない場合は(14)式の破壊歪を用いる。この場合には、寸法に対する強度低下の割合は(15)式に比べて小さくなることわかる。

4.2 破壊様式との対比

ここで、いわゆる分離破壊及びすべり破壊との対比を試みる。従来の寸法効果は、周知のように最弱リンクモデルによって説明され、引張強度や曲げ強度等の傾向とよく一致することが知られている。これは単一破壊面の発生現象がモデルとよく対応するためと思われる。一方、圧縮強度にもこのモデルの適用がしばしば試みられるが破壊発生とビーク強度とは相当な差があり、この事実はむしろ本文で用いたような並列モデルが通っていることを示すものである。本文のように偏心による歪勾配を考慮した直列モデルの場合には(14)、(15)式の第2項の符号を負にするだけでよい。両モデルによる寸法効果の傾向を図-5に示す。直列モデルでは寸法の増加とともに強度は増加し、圧縮によるすべり破壊がこれに対応すると考えられよう。

4.3 実験による検討

石膏を用いた円柱試験片(直径5cm, 同10cm)による実験結果(各8個)を表-2に示す。それぞれの試験片の中央断面に沿った3箇所(120°間隔)にストレーンゲージ(ゲージ長1mm, 2mm)を貼付け、破壊に至るまでの歪を測定した。破壊時の最大歪 ϵ_{max} 、偏心率は直径の小さい方が大きく、(12)式に示した傾向と一致している。先に(図-3)金属試験片の結果の一部を示したが、理想材料の金属においてさえも同一試料50回の偏心率の平均値において数十パーセントの変動が見られ、圧縮試験の困難さを暗示している。

5. まとめ

寸法効果に対する従来の解釈と比較して今回の考察をまとめると次のようになる。

- (1) 圧縮下では試験装置及び試験片の寸法精度の制約から荷重の偏心が避けられない。
- (2) したがって、従来の最弱リンクモデルにこの偏心による歪勾配を考慮すると、寸法とともにむしろ強度は増加し、一般に報告されている事実と合致しない。
- (3) 一方、並列モデルにこの影響を考慮すると実験結果と傾向が一致し、特に材料固有のバラツキが小さい場合には細長比(λ)、球座の影響(R_0)、端面の平行度(SW)及び寸法効果のいわゆる“飽和現象”を考慮することが可能である。
- (4) 以上の結果から、従来観察される寸法の増加に伴う強度低下は、寸法増加による歪勾配の減少と対応する“見掛けの寸法効果”である可能性が強く、すでに指摘されているように材料固有の圧縮強度のバラツキは相当小さいと考えられる。

本文では実験誤差としての荷重の偏心を考察したが、その他の諸問題、例えば端面拘束やこの附近の歪分布等を考慮することが今後の問題である。

参考文献

- 1) Gustkiewicz, J. ; Uniaxial compression testing of brittle rock specimens with special consideration given to bending moment effects, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., Vol.12, pp.13-25 (1975)
- 2) 西松裕一, 山口梅太郎他; 岩石の強度の寸法効果と測定精度, 材料, Vol.18, No.194, pp.69-75 (1969)
- 3) 田野久貴, 佐武正雄; 脆性材料の寸法効果に関する実験ともの考察, 第12回岩盤力学に関するシンポジウム講演概要集, pp.116-120 (1979)
- 4) Bieniawski, Z.T., Van Heerden, W.L. ; The significance of In Situ tests on large rock specimens, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. Vol.12, pp.101-113 (1975)

(31) Consideration on the Relationship of Strain
Distribution to Uniaxial Compressive Strength

Nihon University

Hisataka Tano

Masayuki Kitagawa

Hidehiko Watanabe

Tohoku University

Masao Satake

Abstract

This paper proposes a statistical parallel model of size effect under uniaxial compression test in consideration of the bending moment caused by eccentric load, which is an experimental errors and it can not be avoided.

This unsymmetrical distributed load gives the strain gradient to the specimen. On the other hand, the experimental results of strains measured by means of strain gauges show a decrease of strain gradient in inverse proportion to the diameter of specimen.

Taking above facts into account two typical statistical models, the phenomena of size effect of uniaxial compressive strength can be explained by the parallel model.

From the consideration used by the parallel one, it is concluded as follows;

- (1) The strain(stress) gradient decreases the probability of cleavage fracture of specimen, so that the apparent strength increasing of small size one is observed. This phenomena under uniaxial compression testing is called by "size effect".
- (2) In the case of rock-like materials with the small variance of strength, the phenomena of size effect(i.e. apparent strength increasing) disappears in the large scale specimen due to the uniformed strain distribution.