

(6) 剛塑性有限要素法による斜面の安定解析

京都大学工学部 小林 昭一
同 〇 田村 武
京都大学大学院 角 哲也

1. 概説

従来の岩盤解析法が、主としてある構成式のもとで領域の初期状態からの荷重—変形（一時間）関係を求めることを目的としていることに對して、破壊状態（極限状態）のみを対象とした解析手法もある。たとえば、すべり線理論がそうであり、いくつかの典型的な問題に對して支持力などの正解を与えている。しかし、正解あるいは精度の良い近似解を得るにはかなりの技術が必要とされることや、複雑な境界条件に對して解を得ることが不可能なことなどを考慮すると、極限状態を解析する手段として一般的であるとはいえない。

一方、塑性論の上、下界定理を用いて骨組構造物の崩壊荷重とそのメカニズムを求める手法が古くからある。これらは、容易に通常の線形計画法とその双対問題に帰着されることより、完全な理論体系が整うとともに構造物の最適設計へと発展した分野である。この手法は、骨組構造物などの離散的な構造のみならず、連続体へも一般化が可能である。ただし、この場合には線形計画法とはならず、非線形計画法問題となる。とくに、上界定理に基づくものを有限要素法で近似した数値計算法が、ここでの剛塑性有限要素法である。

以下において、剛塑性有限要素法の理論の概略を説明するとともに、それを用いて行ったいくつかの数値計算結果について述べることにする。

2. 上界定理とつりあい式

上界定理

任意の運動学的許容なひずみ速度場 $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})$ （ただし、外力仕事を正にする）に對し

$$\bar{P} \left\{ \int V X_i \dot{u}_i dV + \int_{S_\sigma} T_i \dot{u}_i dS \right\} = \int D(\dot{\epsilon}_{ij}) dV \quad (1)$$

で定義される荷重強度 $\bar{P}$ は真の破壊荷重 P^* の上界値を与える。すなわち、 $P^* \leq \bar{P}$ 。ここに、 $\dot{u}_i$ 、 T_i 、 X_i は変位速度、応力境界 S_σ 上の traction、および物体力をそれぞれ表す。また、 $D(\dot{\epsilon}_{ij}) = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$ は dissipation であって、 $\dot{\epsilon}_{ij}$ を与えたとき normality rule を満足するような降伏曲面上の応力 σ_{ij} との積として定義される。さて、(1) 式の両辺が $\dot{u}_i$ について一次であること、および破壊時に塑性体積ひずみ速度が零であると仮定することより、破壊荷重 P^* を求めるには次の問題 A を解けばよいことになる。

問題 A

$$\int D(\dot{\epsilon}_{ij}) dV \rightarrow \min. \quad \text{sub. to} \quad \begin{cases} \int V X_i \dot{u}_i dV + \int_{S_\sigma} T_i \dot{u}_i dS = 1 \\ \dot{\epsilon}_{ii} = 0 \end{cases}$$

つりあい式

上記の問題 A を有限要素法により解析する準備として、以下の記号を導入しておく。

$\dot{\epsilon}$: 全要素のひずみ速度ベクトル, σ, τ : 全要素の応力, 偏差応力ベクトル, u : 全節点の変位

ベクトル, $\mathbf{F}$: 全節点の等価外力ベクトル, $\mathbf{v}$: 全要素の体積変化を表すベクトル
 また, 行列 $\mathbf{B}$, $\mathbf{L}$ は $\mathbf{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}$, $\mathbf{v} = \mathbf{L}\mathbf{u}$ なる作用素とする。このとき, 問題 A は

$$\text{問題 A'} \quad \boxed{\begin{array}{l} \int D(\dot{\mathbf{u}}) dV \rightarrow \min. \\ \text{sub. to } \begin{cases} \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{u}} = 1 \\ \mathbf{L} \dot{\mathbf{u}} = 0 \end{cases} \end{array}}$$

として近似される。ここで, 問題 A' の意味を考える。もし, $\dot{\mathbf{u}}$ が問題 A' の解であれば,
 $\mathbf{F}^T \delta \dot{\mathbf{u}} = 0$, $\mathbf{L} \delta \dot{\mathbf{u}} = 0$ なる任意の $\delta \dot{\mathbf{u}}$ に対し

$$\delta \int D(\dot{\mathbf{u}}) dV = \int \sigma^T \delta \mathbf{\varepsilon} dV = \left(\int \sigma^T \mathbf{B} dV \right) \delta \dot{\mathbf{u}} = 0$$

でなければならない。いま, $\mathbf{L} \delta \dot{\mathbf{u}} = 0$ を考慮すると一般性を失うことなく, 上式は

$$\left(\int \mathbf{B}^T \mathbf{\sigma} dV \right)^T \delta \dot{\mathbf{u}} = 0$$

とすることができる。さて, 線形代数学の基本定理「 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ に解 $\mathbf{x}$ が存在するための必要十分条件は $\mathbf{A}^T \mathbf{y} = 0$ を満たす任意の $\mathbf{y}$ に対し $\mathbf{b}^T \mathbf{y} = 0$ であること」を, $\mathbf{A} = (-\mathbf{L}^T, \mathbf{F})$, $\mathbf{b} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{\sigma} dV$ として適用すれば, 問題 A' の解 $\dot{\mathbf{u}}$ から normality rule を通して定まる $\mathbf{\sigma}$ に対して, 方程式:

$$\int \mathbf{B}^T \mathbf{\sigma} dV + \mathbf{L}^T \lambda = \mu \mathbf{F}$$

に解 λ, μ が存在することになる。ここで, λ を不定圧 (間隙水圧), μ を荷重強度とみれば, (2) 式はつりあい条件を表していることがわかる。すなわち, 上界定理に基づく解の性質より, そのときの (偏差) 応力とつりあうべき, 不定圧と外力の存在がいえることになる。あらためて問題 A' を書き直して

問題 B

$$\boxed{\begin{array}{l} \int \mathbf{B}^T \mathbf{\sigma} dV + \mathbf{L}^T \lambda = \mu \mathbf{F} \quad (3) \\ \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{u}} = 1 \quad (4) \quad \mathbf{L} \dot{\mathbf{u}} = 0 \quad (5) \end{array}}$$

を解くことと等価であるといってよい。また, (3) 式に $\dot{\mathbf{u}}^T$ を乗じて (4), (5) 式を考慮すると上記の μ が dissipation の最小値に一致していることもわかる。

もちろん, 上界定理からわざわざ導くことなしに問題 B を書き下すことも可能である。すなわち, 破壊 (極限) 状態の定義そのものが, 1) 一定荷重のもとで, 2) 降伏条件を満たしながら, 3) 変形が持続する, 4) つりあい状態であることを考えれば, 問題 B は明らかに妥当性を有している。

上述のことより, 上界定理に基づく極限解析は, 次の関数

$$\Phi = \int D(\dot{\mathbf{u}}) dV + \lambda^T \mathbf{L} \dot{\mathbf{u}} - \mu (\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{u}} - 1)$$

の $\dot{\mathbf{u}}$, λ , μ に関する停留条件を解くことと等価であるといってよい。ここで λ, μ は, いわゆる Lagrange 乗数である。

なお, 上界定理に基づいて定式化しているのであるから, これにより求まる破壊荷重の近似値はすべて, 真の値よりも大きくなると予想されるが, 必ずしもそうではない。それは, von Mises のような塑性体積ひずみの出ない降伏条件に対して, 実際には各要素の体積変化を零にしているに過ぎないことに由来するものである。すなわち, 要素内のすべての点については, この条件を満足しておらず, 厳密な意味では許容速度場になっていないからである。

3. 数値計算手法

von Mises の降伏条件を用いた場合の、剛塑性有限要素法の具体的な数値計算手法について述べる。

降伏条件と dissipation

降伏条件: $f = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} - \sigma_0^2 = 0$ normality rule: $\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda S_{ij}$
 より, $\lambda = \frac{\bar{e}}{\sigma_0}$ と書ける。ここで, $\bar{e} = (\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij})^{\frac{1}{2}}$ は相当塑性ひずみ速度である。したがって,

$$\text{dissipation: } D(\dot{\epsilon}_{ij}) = S_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \sigma_0 \bar{e} \quad (\text{偏差) 応力: } S_{ij} = \frac{\sigma_0}{\bar{e}} \dot{\epsilon}_{ij}$$

のように、ひずみ (変位) 速度によって簡単に表すことができる。

方程式の構成

上で求めた応力を (3) 式に代入して、解くべき非線形連立方程式系を得る。

$$\left(\sigma_0 \left\{ \frac{B^T B}{\bar{e}} dV \right\} \right) \dot{u} + L^T \lambda = \mu F \quad (6), \quad F^T \dot{u} = 1 \quad (4), \quad L \dot{u} = 0 \quad (5)$$

ここで、未知量は $\dot{u}, \lambda, \mu$ である。解法は Newton-Raphson 法を用いた。すなわち、

$$\dot{u} \rightarrow \dot{u} + \Delta \dot{u}$$

と代入して、 $\Delta \dot{u}$ について (6) 式を一次の Taylor 展開したあと、 $\Delta \dot{u}, \lambda, \mu$ に関する線形方程式を解き、 $\dot{u} \rightarrow \dot{u} + \beta \Delta \dot{u}$ として逐次解を求めた。なお、ここで β は収束性を保つためのパラメータであって、 $0 \leq \beta \leq 1$ の範囲で適当な数値を使用した。展開した (6) 式を具体的に以下に記す。

$$\sigma_0 \left\{ \int \left(\frac{B^T B}{\bar{e}} - \frac{B^T (B \dot{u}) (B \dot{u})^T Q B}{\bar{e}^3} \right) dV \right\} \Delta \dot{u} + L^T \lambda - \mu F = -\sigma_0 \left\{ \int \frac{B^T B}{\bar{e}} dV \right\} \dot{u}$$

ここで、 Q は工学的ひずみとテンソルひずみを調整する行列で二次元の場合 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ である。

数値計算例

1) 浅い基礎の支持力

半無限領域に剛な荷重を作用させるときの支持力は、Prandtl の解にあるごとく $\pi + 2$ である。図-1 (a), (b) には、本手法により求めた速度場および主応力図を示している。このとき、剛な荷重の下での垂直応力は、Prandtl の解と異なり分布するが、平均値は 5.36 であり、誤差は 4.3% であった。なお、たわみ性荷重を想定した場合の値は 5.06 であり、誤差は -1.6% であった。このように、上界定理に基づきながら正解より下まわるのは 2. で述べた理由による。その他、この解析法の誤差を生み出す原因として、領域全体がつねに降伏していると仮定していることが考えられる。数値計算の途中ではほとんど剛体のような変形を示す要素が現れるが、本来ならば解析領域から除外するのが妥当であろう。

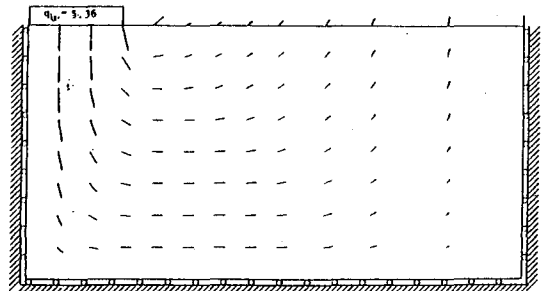


図-1 (a)

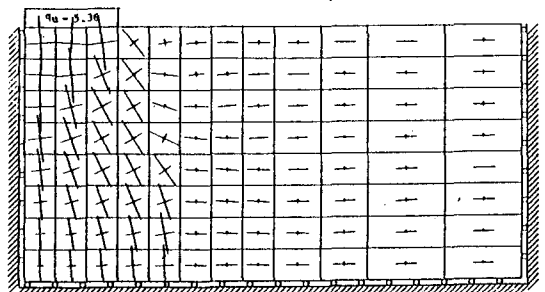


図-1 (b)

2) 傾斜 ($\beta > 0$) のある地盤の支持力

すべり線法による支持力の値は $2 + \pi - 2\beta$ である。 図-2 (a), (b) には, $\beta = +\pi/6$ の場合の速度場および主応力図を示す。 支持力として 4.21 が得られるが, 誤差は 2.8% であった。

3) 自重による斜面の安定問題

斜面の深さ係数 $n_d = 1.5$, 傾斜角 $\beta = 90^\circ$, 45° , 18.4° の場合の速度場, 主応力図を図-3, 4, 5 に示す。 各国 (a) のなかにある破線は, Taylor によって求められたすべり円である。 なお, 安定係数を Taylor のものと比較すると, 深さ係数が 2 程度に大きくなると, 1~2% の範囲で一致することがわかった。

参考文献

1) T. Tamura, S. Kobayashi & T. Sumi: Limit Analysis of Soil Structure by Rigid Plastic Finite Element Method, Soils & Foundations, Vol.24, No.1, 1984 (印刷中)。

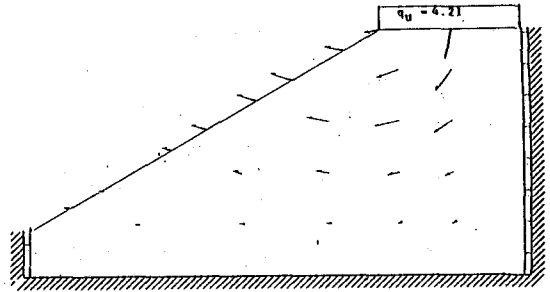


図-2 (a)

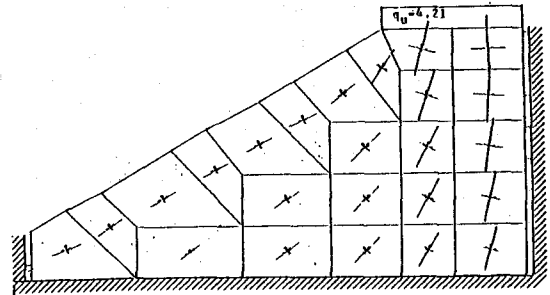


図-2 (b)

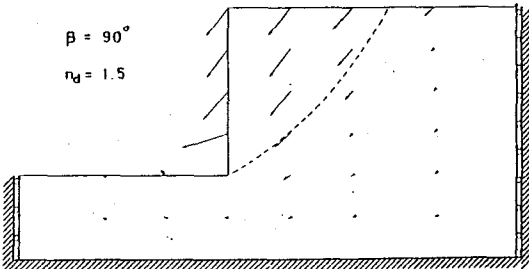


図-3 (a)

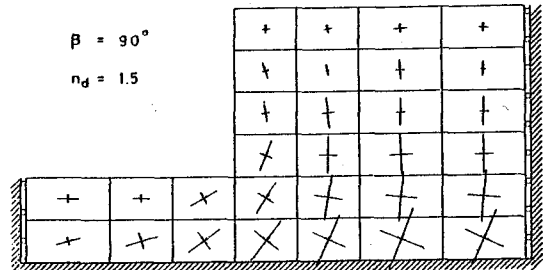


図-3 (b)

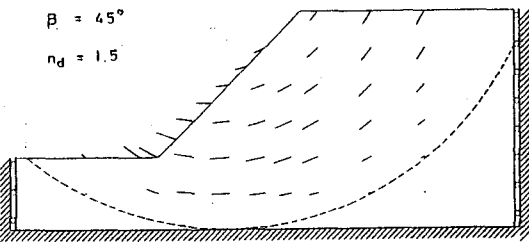


図-4 (a)

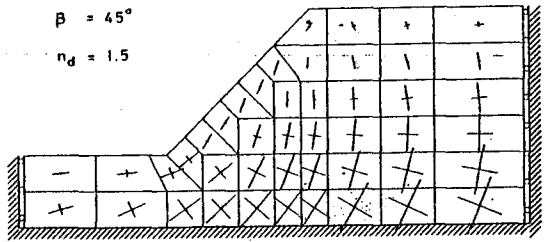


図-4 (b)

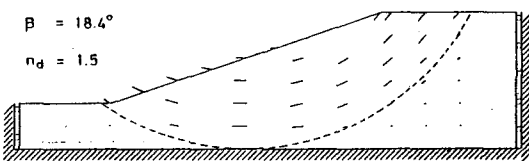


図-5 (a)

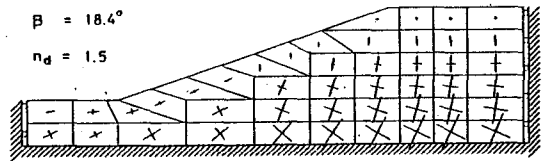


図-5 (b)

(6) SLOPE STABILITY ANALYSIS BY RIGID PLASTIC FINITE ELEMENT METHOD

S. Kobayashi, T. Tamura & T. Sumi

Abstract

We investigate a numerical approach to analyze the limit state of the rockslope, assuming the mechanical property of rock is rigid plastic.

It is well known that the collapse analysis of the frame structure can be formulated as the linear programming problem through the upper bound theorem of plasticity. Recently this method was extended to continuum. Since the nonlinear programming problem must be treated in this case, no well-established technique is found out in the literature. And also there is a little theoretical confusion concerning the constraint conditions and the indeterminate pressure.

In this paper, we firstly formulate the problem by using the upper bound theorem and secondly show that the minimization of the upper bound is equivalent to finding out the equilibrium state with the indeterminate pressure. The present numerical procedure is illustrated by the typical problems, i.e., the shallow foundation and the slope stability. Good agreement between the present results and the well known solutions confirms that our approach can be used as a general method for the limit analysis of rock structure.