

(2) 不連続性材料の弾性コンプライアンス

埼玉大学工学部

小田 匡寛

鈴木健一郎・前浜卓郎

1. はじめに

岩盤の力学的性質は、よく知られているように断層や節理のような不連続面の存在に強く依存している。この研究は、不連続面を含む材料の弾性コンプライアンスを、その幾何学的性質をも考慮して定式化し、また二次元供試体による実験によって理論式の適合を示そうとするものである。

2. 不連続面（節理）のモデル化

岩盤の不連続面は、1)規模の大きい断層と、2)規模の点で断層に劣るがその数において圧倒的である節理とに大別できる。土木構造物の安定に及ぼす断層の影響は甚大であって、岩盤力学の関心が断層の力学的・工学的評価法に集中していたのは当然なことで云える。たとえば Goodman らは、断層を有限要素法の中での一分割要素（ジョイント要素）として処理する方法を提案し、断層の安定問題に及ぼす効果定量的かつ具体的に評価する道を拓いた。節理群にも同様なジョイント要素群を考えて解析できるかもしれない。しかしその数は断層のそれと比べて圧倒的に多く、いかに計算機の容量が大きくなったとしても、個々の節理を取り上げて土木構造物の安定に及ぼす効果を評価するのは、極めて非現実的である。この研究は節理に代表されるような岩盤の不連続性を主に対象とし、平均化の助けを借りて新しい解析方法を確立しようとするものである。

各節理をどのような力学的に等価なモデルで近似するかは、問題の対象によって変化するであろう。図1は、風化した花崗岩に見られる節理の一部を顕微鏡写真で示したものである。地下水の通り道となる節理・断層は、一般的に云って最も風化作用を受けやすく、写真にもみられるとおり、風化の産物である所の粘土鉱物で充填されていて、けっして単純な破断面となっていない。このように、母岩と比べて極めて軟弱で、しかも極めて小さいせん断抵抗を持つ粘土によって充填された節理は、たとえ見掛け上閉じたクラックに見えたとしても、むしろ開いたクラックで近似できるような挙動を有するものと推測される。ここでは、図2に示すように、岩盤の不連続面を(a)の二つの開いたクラック、あるいは(b)に示す collinear クラックとしてモデル化できるものとする。（本来ならば、母岩の弾性係数・せん断抵抗と比べて著しく低

い材料を間いたクラック内に挿入すべきであるが、近似式を求める本論文の主旨に沿えば、図2のモデルで十分とみなすことができる。）

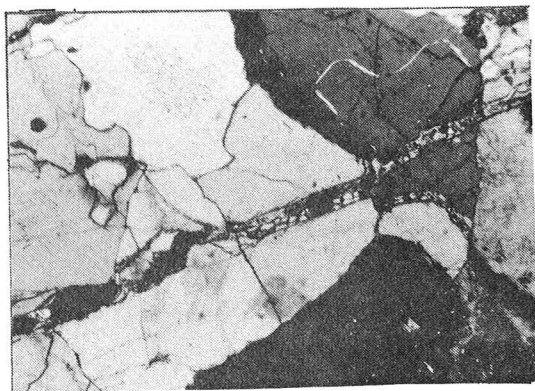
3. 弾性コンプライアンス

3.1 序論： 図2に示すようなクラックを総数 m 含む体積 V の弾性体を考える。平均応力 $\bar{\sigma}_{ij}$ ，平均歪 $\bar{\epsilon}_{ij}$ を

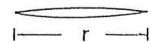
$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dv \quad (1)$$

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij} dv = \frac{1}{V} \int_V \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) dv$$

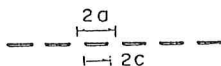
で定義する。ただし、 σ_{ij} , ϵ_{ij} , u_i はそれぞれローカルな応力、歪、変位とする。平均歪 $\bar{\epsilon}_{ij}$ は、弾性コンプライアンス $\bar{D}_{ijkl}$ を介して、平均応力 $\bar{\sigma}_{ij}$ に関係づけられ、また $\bar{D}_{ijkl}$ は、クラックを含まないマト



図・1 風化花崗岩中のクラックの顕微鏡写真



(a) Open crack



(b) Collinear crack

図・2 クラックモデル

リップスの弾性コンプライアンス $\bar{M}_{ijkl}$ と、クラックによる弾性コンプライアンス $\bar{C}_{ijkl}$ とから成っている。

$$\bar{C}_{ij} = \bar{C}_{ijkl} \bar{u}_{kl} \quad \bar{D}_{ijkl} = \bar{M}_{ijkl} + \bar{C}_{ijkl} \quad (2)$$

マトリックスが等方弾性体であるとする、ヤング率 E とポアソン比 ν を用いて、 $\bar{M}_{ijkl}$ は

$$\bar{M}_{ijkl} = \frac{(1+\nu)}{E} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (3)$$

と書ける。ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。

$\bar{C}_{ijkl}$ を誘導する方法には色々あるが、たとえば Horii と Nemat-Nasser (1983) によると、 $\bar{C}_{ijkl}$ は一般的に

$$\bar{C}_{ijkl} \bar{u}_{kl} = \frac{1}{V} \int_{2S} \frac{1}{2} (u_i m_j + u_j m_i) ds \quad (4)$$

を満足している。ここで $2S$ は、 $m^{(m)}$ 個のクラックの総表面積で、 m_i は各クラックの面に立てた法線方向を向く単位ベクトルである。(k番目のクラックの表面積を $2S^{(k)}$ とすれば、 $2S = \sum_{k=1}^m (2S^{(k)})$ となる。) 今、k番目のクラックだけを取り出し、(4)式の積分を考えてみよう。

クラックは十分に偏平であるとする、その表面に立てた法線ベクトルは、クラックの主面に立てた法線単位ベクトル n_i とほぼ一致し、一定とみなせるので、

$$\frac{1}{2V} \int_{2S^{(k)}} (u_i m_j + u_j m_i) ds = \frac{S^{(k)}}{2V} (n_i \bar{u}_j + n_j \bar{u}_i) \quad (5)$$

となる。ただし $\bar{u}_i$ は、

$$\bar{u}_i = \frac{1}{S^{(k)}} \int_{S^{(k)}} (u_i^{(+)} - u_i^{(-)}) ds = \frac{1}{S^{(k)}} \int_{2S^{(k)}} u_i ds \quad (6)$$

で定義される量であって、図3を参考にすると、クラックの(a)面と(b)面の間で生じる変位のジャンプ量に等しい。

体積 V に含まれる全てのクラックから、その法線ベクトル n_i がある微小立体角 $d\Omega$ 内に入り(全立体角 Ω は 4π)、かつクラックの長さ(代表長さ)が r から $r+dr$ にあるクラックの数 dN は、

$$dN = 2m^{(V)} E(n, r) d\Omega dr \quad (7)$$

で表わされる。ここで $E(n, r)$ は、クラックの方向 n と大きさ r に依存する密度関数とし、 $\int_0^\infty \int_{\Omega} E(n, r) d\Omega dr = 1$ の条件を満足するものとする。(5)式は、k番目のクラックにのみ注目して、(4)式の右辺を積分している。しかし、方向 n_i と r で特徴づけられるクラックの総数は(7)式で推定されているので、今、クラック相互の弾性干渉を無視できるとすると、総数 dN 個のクラックに相当

する(4)式の右辺の積分は、

$$\frac{\rho}{2} S(n) (n_i \bar{u}_j + n_j \bar{u}_i) 2E(n, r) d\Omega dr \quad \rho = \frac{m^{(m)}}{V} \quad (8)$$

で評価できる。体積 V 中のすべてのクラックを考慮するために、(8)式を $0 \leq \Omega \leq 4\pi$, $0 \leq r < \infty$ の範囲で積分すれば、その結果は、(4)式の左辺に等しいはずである。

$$\bar{C}_{ijkl} \bar{u}_{kl} = \frac{\rho}{2} \int_0^\infty \int_{\Omega} S(n) (n_i \bar{u}_j + n_j \bar{u}_i) 2E(n, r) d\Omega dr \quad (9)$$

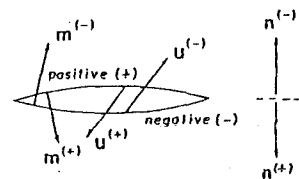
(9)式は、弾性コンプライアンス $\bar{C}_{ijkl}$ を求めるためには、変位のジャンプ量 $\bar{u}_i$ を、クラックの主面の法線方向 n_i とクラックの大きさ r の関数として表わせばよいことを示している。

3.2 変位のジャンプ量について: クラックを偏平な楕円体とする二次元問題とすれば、弾性解を利用することができる。 $\bar{u}_i$ は

$$\bar{u}_i = \frac{\pi}{2E} r \bar{u}_{ij} n_j \quad (10)$$

と書ける。ただし r は偏平楕円の長径とする。また三次元的な penny shaped クラックを考えた場合、結果に本質的な影響を及ぼさないで若干の単純化を施せば、(10)式の $\pi/2E$ を $8/3\pi E$ に代えることによって同型のジャンプ量を得る。また図2の(b)に示す collinear クラックについても、(1)周期 $2a$ で無限に連なる collinear クラックの弾性解が利用できる。また(2)周期 $2a$ の長さ a は、クラックの形式的な長さ r に比例すると仮定できれば、係数を別にして(10)式とまったく同じ形式のジャンプ量 $\bar{u}_i$ を得る。

吉中と山辺(1982)は、節理面の垂直剛性、せん断剛性を調べる目的でせん断試験を行った。それによると、载荷の初期に限れば垂直剛性は近似的に



図・3 m , n , $u^{(+)}$, $u^{(-)}$ の定義

せん断剛性に等しく、また剛性率は節理面の代表長さに逆比例的に小さくなっている。この結果は、節理を生じる変位のジャンプ量、

$$\bar{\delta}_i = \frac{1}{D} \tau \bar{\sigma}_{ij} n_j \quad (11)$$

と書けることを意味して、(10)式と(11)式の形式が完全に一致している。(ただし実験定数 $1/D$ は、(10)式の場合と異なり、垂直応力などの条件に依存している。)

以上の結果から、クラックの平均的な変位のジャンプ量 $\bar{\delta}_i$ は、(11)式で近似できるものとし、また定数 $1/D$ はクラックの形状とマトリックスの弾性にのみ依存するものと仮定する。(10)式と(11)式に用いると、 $\bar{C}_{ijkl}$ は、

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ijkl} &= \frac{\pi D}{8D} \int_0^\infty \int_\Omega r^3 (n_i n_k \delta_{jl} + n_j n_l \delta_{ik}) 2E(\eta, r) d\Omega dr \\ &= \frac{1}{4D} (\delta_{il} F_{jk} + \delta_{jl} F_{ik} + \delta_{jk} F_{il} + \delta_{ik} F_{jl}) \end{aligned} \quad (12)$$

と書ける。ただし、penny shaped クラックの場合を考えると、 $S(r)$ として $\frac{1}{4}\pi r^2$ を、また $1/D$ として $8/3\pi E$ をそれぞれ用いた。(12)式の F_{ij} は、

$$F_{ij} = \frac{\pi D}{4} \int_0^\infty \int_\Omega r^3 n_i n_j E(\eta, r) d\Omega dr \quad (13)$$

で定義される二階の対称テンソルであり、クラックの幾何学性を表現しているもので、クラック・テンソルと呼ばれている。(2),(3),(12)式から、最終的な応力～歪関係は、

$$\begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_{11} \\ \bar{\epsilon}_{22} \\ \bar{\epsilon}_{33} \\ \bar{\epsilon}_{23} \\ \bar{\epsilon}_{31} \\ \bar{\epsilon}_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} F_{11} + \frac{D}{E} & -\frac{D}{E} \nu & -\frac{D}{E} \nu & 0 & \frac{1}{2} F_{13} & \frac{1}{2} F_{12} \\ & F_{22} + \frac{D}{E} & -\frac{D}{E} \nu & \frac{1}{2} F_{23} & 0 & \frac{1}{2} F_{12} \\ & & F_{33} + \frac{D}{E} & \frac{1}{2} F_{23} & \frac{1}{2} F_{31} & 0 \\ & & & \frac{1}{4}(F_{22} + F_{33}) + \frac{D}{4G} & \frac{1}{4} F_{12} & \frac{1}{4} F_{31} \\ & & & & \frac{1}{4}(F_{33} + F_{11}) + \frac{D}{4G} & \frac{1}{4} F_{23} \\ & & & & & \frac{1}{4}(F_{11} + F_{22}) + \frac{D}{4G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{33} \\ 2\bar{\sigma}_{23} \\ 2\bar{\sigma}_{31} \\ 2\bar{\sigma}_{12} \end{pmatrix} \quad (14)$$

(Symmetrical)

と書ける。

3.3 Self-consistent method: お互に述べたように、(14)式の応力～歪関係は、クラック間の弾性干渉を無視することによ、誘導された。クラックの密度が増え、弾性干渉は無視できない程度に大きくなり、それを考慮した考察が必要となろう。そこでクラック・テンソル F_{ij}

が $\frac{1}{2}F_0\delta_{ij}$ に等しい場合を取り上げて、Self-consistent methodを適用し、クラック間の弾性干渉の問題を検討してみる。

$F_{ij} = \frac{1}{2}F_0\delta_{ij}$ (ただし $F_0 = \text{tr} F_{ij}$)の時、クラックを含む材料は弾性的に等方となることができ、従って求めるべき弾性定数は、 $\bar{E}$ と $\bar{\nu}$ の二つだけであると考える。(12)式の誘導にあたって、各クラックが全体の弾性コンプライアンスに及ぼす影響を評価する時、マトリックスの弾性定数 E, ν を用いた。しかし、Self-consistent methodの教える所に従えば、(Horii and Nemat-Nasser (1983), Mura (1982))、 E, ν に代わって $\bar{E}, \bar{\nu}$ を用いることになる。すなわち、クラック間の弾性干渉の影響は、すでに $\bar{E}, \bar{\nu}$ の中で考慮されていると考えられるのである。従って、(12)式は、 $F_{ij} = \frac{1}{2}F_0\delta_{ij}$ を考慮して、

$$\bar{C}_{ijkl} = \frac{\pi F_0}{8\bar{E}} (\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}) \quad (15)$$

となる。(15)式と(14)式に用いれば、

$$\left[\left(\frac{1+\bar{\nu}}{\bar{E}} - \frac{1+\nu}{E} \right) \delta_{ik}\delta_{jl} - \left(\frac{\bar{\nu}}{\bar{E}} - \frac{\nu}{E} \right) \delta_{ij}\delta_{kl} \right] \bar{\sigma}_{kl} = \frac{\pi F_0}{8\bar{E}} (\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}) \bar{\sigma}_{kl} \quad (16)$$

となり、これは恒等的に

$$\frac{\bar{\nu}}{\bar{E}} = \frac{\nu}{E} = \left(1 - \frac{\pi}{4} F_0 \right) \quad (17)$$

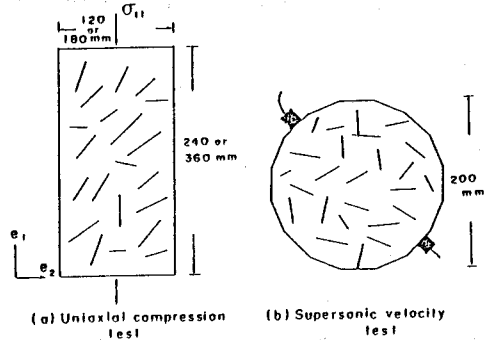
と一致する。

4. 実験

実験は、図4に示す通り、(a)の一軸圧縮試験と(b)の弾性波速度(P波)試験の二種類である。クラ

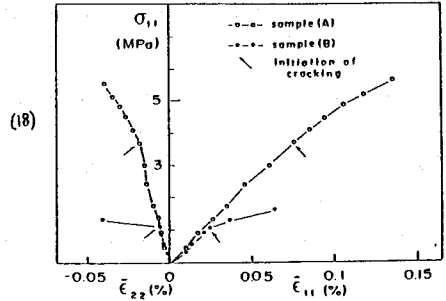
ックは、グリースを塗ったスリーマットによって作られていて、石膏と比べて著しく変形性に富み、図-1に示す粘土鉱物を充填された節理のモデルとして適当であると共に、開いたクラックとして挙動することが確かめられている。

4.1 一軸圧縮試験： 高い精度で歪測定を行うために、 $1/1000$ mmのダイヤルゲージの付いたコンタクトゲージによって、供試体に埋め込まれた標点間の距離を読み取った。軸応力 $\bar{\sigma}_{11}$ ～軸歪 $\bar{\epsilon}_{11}$ ～横歪 $\bar{\epsilon}_{22}$ の関係(図-5)は、矢印で示すクラック発生点までは、ほぼ線型の弾性を示している。二次元供試体に対する(12)式は、



図・4 一軸圧縮試験と弾性波速度試験

$$\begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_{11} \\ \bar{\epsilon}_{22} \\ \bar{\epsilon}_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} F_{11} + 1 & -\nu & \frac{\pi}{4} F_{12} \\ \text{(Symmetrical)} & \frac{\pi}{2} F_{22} + 1 & \frac{\pi}{4} F_{12} \\ \frac{\pi}{8} (F_{11} + F_{22}) + \frac{(1+\nu)}{2} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ 2\bar{\sigma}_{12} \end{pmatrix} \quad (18)$$

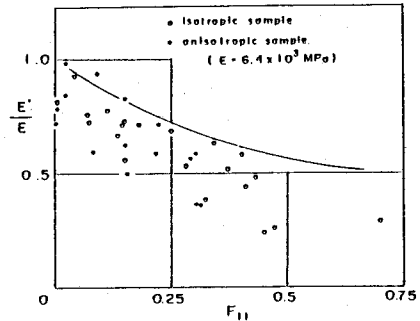


図・5 一軸圧縮試験における応力歪関係

となる。ただし、クラックを偏平楕円と考え、 $\frac{1}{G} = \frac{\pi}{2E}$ とした。さらに一軸圧縮試験では、 $\bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{12} = 0$ となるので、(12)式は、

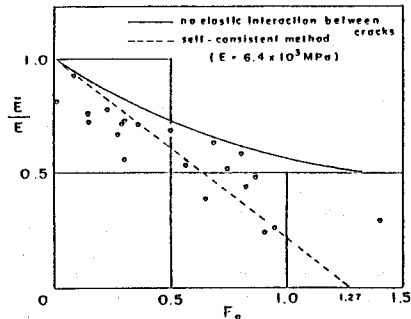
$$\frac{\bar{\sigma}_{11}}{\bar{\epsilon}_{11}} = E' = \frac{E}{\frac{\pi}{2} F_{11} + 1} - \frac{\bar{\epsilon}_{22}}{\bar{\epsilon}_{11}} = \nu' = \frac{\nu}{\frac{\pi}{2} F_{11} + 1} \quad (19)$$

と簡単になる。図-5の直線部分から計算した $E' (= \bar{\sigma}_{11} / \bar{\epsilon}_{11})$ を図-6に、(19)式の理論式と共に示した。実線の理論曲線は、実測結果の上限線にあたっていて、クラック間の弾性干渉を無視したことの結果と考えられる。



図・6 $E'/E \sim F_{11}$ 関係

今、 $F_{ij} = \frac{1}{2} F_0 \delta_{ij}$ の供試体の結果を取り出して示したのが図-7である。この場合の実線は(19)式を、また破線は(17)式をそれぞれ示している。クラック間の弾性干渉を近似的に考慮した(17)式は、実測結果をよく説明しているのが注目される。



図・7 等方供試体に関する $E'/E \sim F_0$ 関係

4.2 弾性波速度試験： 各供試体(図-8,9(a))あたり8方向のP波速度 U_p' をクラックを含まない供試体のP波速度 U_p で無次元化し、それを二乗して方向ごとに示したのが図-8,9(b)である。また同図(c)には、 E'/E の方向による変化を(10)式から計算して求めたものを示している。 $(U_p' / U_p)^2$ は、ほぼ E'/E に等しいことが確かめられるが、図-8,9はこのことを裏付けていると云える。

(2) ELASTIC COMPLIANCE FOR ROCK LIKE MATERIALS WITH RANDOM CRACKS

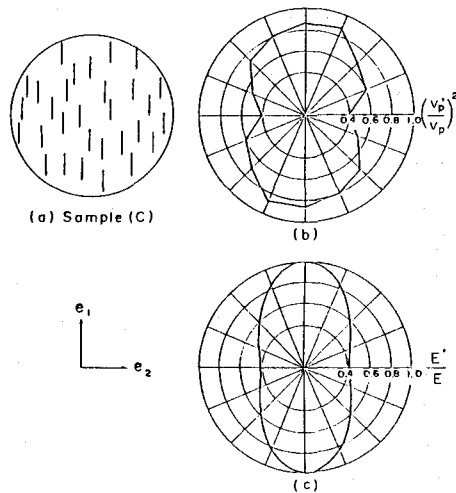
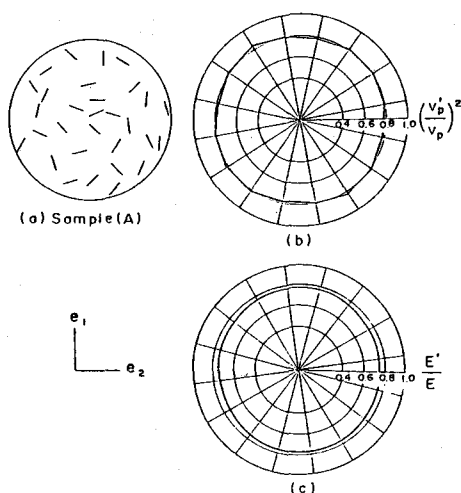
By MASANOBU ODA
KENICHIRO SUZUKI
TAKURO MAESHIBU

(Department of Foundation
Engineering, Saitama
University)

Abstract

Elastic compliance for cracked materials like rocks and rock masses is theoretically formulated in terms of the generalized fabric tensor which has been introduced as an index measure to express explicitly the crack geometry. By means of uniaxial compression tests and of supersonic wave velocity tests on gypsum plaster samples with random cracks, the formulation is proved to be a good approximation for describing the elastic response of cracked materials. The conclusions are summarized as follows:

- 1) The principal axes of the fabric tensor of second-rank exactly coincide with the symmetry axes of the elastic compliance tensor of fourth-rank.
- 2) The so-called self-consistent method is very useful to estimate the overall elastic moduli by taking into account the effect of elastic interaction between cracks.
- 3) Since the supersonic wave velocity is closely related to the character of the fabric tensor, it can be expected that the field measurement of wave velocity is useful to estimate fabric tensor of in situ rock masses.



図・8 等方供試体に関する弾性波速度試験

図・9 異方供試体に関する弾性波速度試験

References

- (1) Horii, H. and Nemat-Nasser, S. (1983): "Overall moduli of solids with microcracks: load induced anisotropy," J. Mech. Phys. Solids, Vol.31, No.2, pp.155-171.
- (2) Mura, T. (1982): "Micromechanics of Defects in Solids," Martinus Nijhoff publ., The Hague, Boston.
- (3) Oda, M. (1983a): "A method for evaluating the effect of crack geometry on the mechanical behavior of cracked rock masses," Mechanics of Materials, Vol.2, No.2, pp.163-171.
- (4) Yoshinaka, R., Yamabe, T. and Sekine, I. (1982): "Experimental and numerical studies on discontinuous rock mass: evaluation of equivalent deformation moduli," Report of Dept. Found Engrg. & Const. Engrg., Saitama University, Vol.12, pp.67-85.