

(37) 地下空洞における変位計測の最適位置について

神戸大 正 ○清水則一 正 桜井春輔

1. はじめに

地下空洞の工事に於いて、現場計測はその意義が認識され活発に実施されるようになった。トンネルにおいては、すでに、計測の標準を示す指針¹⁾が出版され、大いに利用されている。しかし、現場計測を意義あるものにするためには、現場計測の目的を明確に設定した上で(計測の目的)、測定量に何を選ぶか(計測項目)、それをいかに測定するか(計測方法)及び計測結果をいかに評価するか(計測結果の評価法)を十分に検討する必要がある。また、計測の効率、経済性を高めるためには、目的にあった計測パターン(最適計測位置)を知ることが重要である。

本報告では、まず、計測変位から地山の初期応力及び材料定数を推定する一方法を提案し、次に、初期応力及び材料定数を精度よく求めるための最適な計測位置について検討する。計測項目は、内空変位、天端沈下、地中変位である。

2. 変位計測結果の評価法 - 逆解析による地山の初期応力及び材料定数の推定 -

現場において、計測された変位を用いて、地山の初期応力及び材料定数を求める問題は、通常の問題 - 材料定数と荷重を与えて、解として変位を求める問題 - の逆であり、逆問題と呼ばれることがある。逆問題は、従来、応力やひずみを測定して材料の性質を探索する同定問題²⁾、最適形状の決定問題³⁾などとして研究されてきたが、地盤工学の分野においても、最近、注目されている⁴⁾。ここでは、地下空洞掘削時に於いて、計測した変位を入力データとして、初期応力及び材料定数を推定する逆問題の解析(逆解析)方法を提案する。本方法の手順を以下に示す。

- ① 等方等質弾性体モデルを設定する。モデルの材料定数は、ポアソン比とヤング係数である。
- ② 初期応力とヤング係数との比をパラメータ(初期応力パラメータと呼ぶ)とする。
- ③ 任意点、任意方向の変位と初期応力パラメータとの関係式を導く(理論モデルによる変位式)。このとき、変位は初期応力パラメータに関して線形となり、ポアソン比とは非線形の関係にある。
- ④ ポアソン比を仮定する。
- ⑤ 計測された変位と、それに対応する理論モデルの変位との間に最小二乗法を適用し、最適な初期パラメータを求める。
- ⑥ 初期応力パラメータより、地山の初期応力の主応力方向を求め、主応力の値及びヤング係数を推定する。

本来、地山は等方等質弾性体モデルによって表わし得ない複雑な挙動を示す。したがって、上記①の設定には無理があるように感じられる。しかし、本研究の目的は、実際の地山の変位挙動とおよそ同じ挙動を示す仮定の弾性体及び初期応力を求めようとするものであり、この意味において、本方法は弾性地山に限らず適用できる。

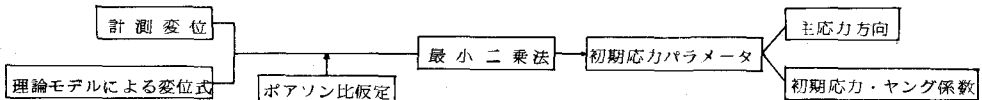


図 - 1 提案する逆解析法の概念図

3. 逆問題の定式化 - 境界要素法による取扱い -

前章で提起した逆問題を境界要素法によって定式化する。境界要素法は周知のように、等質弾性体の場合、未知量が境界上のみ分布しているため、領域の離散化を行なう必要がないという有限要素法や差分法などにない特徴を有する。この事は、計算容量の減少を図れ、無限領域を近似する必要がないため三次元解析が容易などの

利点に結びつく。また、変位、応力及びひずみは、必要な地点において必要最小限の計算量で求めることが出来る。さらに、地下空洞問題のような、掘削問題においては初期応力の取扱いが容易である利点を有する。以上の事を考慮すれば、前章で提起した逆問題の解析には境界要素法が適しているものと考えられる。以下、境界要素法による定式化を要点だけ簡単に説明する。なお、この定式化は間接法に属するものであるが、直接法による定式化も同様に行なうことが出来る。両定式化の詳細は、稿を改めて記す。

① 境界要素法の基礎式

図-2に示すようなトンネルあるいは地下空洞周辺の任意の点 $P(x, y, z)$ の変位は、地山を弾性体と仮定すると次の式で表わされる。

$$u_i(P) = \int_S \bar{u}_{ik}(P; \xi) q_k(\xi) dS_\xi \quad (i, k = x, y, z) \quad (1)$$

ここで、 $u_i(P)$ は任意の点 P の変位ベクトル、 $q_k(\xi)$ は境界上に分布する応力のディメンジョンを持つ未知量ベクトルである。また、 $\bar{u}_{ik}(P; \xi)$ は全無限弾性体内の一点 ξ に単位集中力が k 方向に作用した場合の点 P の変位ベクトルである (Kelvin 解)。なお、一つの項の指標の繰り返しについては総和規約を適用する。未知量 q_k は次の方程式より求まる。

$$-n_j(\xi) \sigma_{ji}^0 = \frac{1}{2} q_i(\xi) + \int_S \bar{T}_{ik}(\xi; \xi) q_k(\xi) dS_\xi \quad (2)$$

ただし、 σ_{ji}^0 は初期応力、 $n_i(\xi)$ は空洞表面の点 ξ における単位法線ベクトル、 $\bar{T}_{ik}(\xi; \xi)$ は表面上の点 ξ における Kelvin 解に対応する応力ベクトルである。

式 (1) 及び (2) を適当に離散化して、それぞれ次のように表わす。

$$u_i(P) = \{U_i(P)\}^T \{q\} \quad (3)$$

$$-[n] \{\sigma^0\} = [T] \{q\} \quad (4)$$

ただし、 $\{q\}$ は未知量ベクトル、 $[n]$ は外法線ベクトルより構成される行列、 $\{\sigma^0\}$ は初期応力ベクトル $\{\sigma^0\} = \{\sigma_x^0 \ \sigma_y^0 \ \sigma_z^0 \ \tau_{yz}^0 \ \tau_{zx}^0 \ \tau_{xy}^0\}^T$ である。また、 $\{U_i(P)\}$ は変位の影響係数ベクトル、 $[T]$ は応力に関する影響係数行列である。式 (3) 及び (4) が境界要素法における基礎式となる。

② 変位・初期応力パラメータの関係式

式 (4) を $\{q\}$ について解き、式 (3) に代入すれば次の式を得る。

$$u_i(P) = \{U_i(P)\}^T [T]^{-1} (-[n]) \{\sigma^0\} \equiv \{F_i(P)\}^T \{\sigma^0\} \quad (5)$$

ここで、 $\{U_i(P)\}$ の各成分は $1/E$ を共通因子 (E はヤング係数) としているので、これをくり出し $\{\sigma^0\}$ に含めると、式 (5) は次の式のように表わせる。

$$u_i(P) = \{F_i^*(P)\}^T \{\sigma^0\} \quad (6)$$

ただし、 $\{\sigma^0\} = \{\sigma_x^0/E, \sigma_y^0/E, \sigma_z^0/E, \tau_{yz}^0/E, \tau_{zx}^0/E, \tau_{xy}^0/E\}^T$ 、 $\{F_i^*(P)\}$ は、式 (5) における $\{F_i(P)\}$ より $1/E$ をくり出したものであり、空洞の形状及びポアソン比によって定まるベクトルである。式 (6) が、任意点の変位ベクトルと初期応力パラメータの関係式である。なお、任意方向の変位は式 (6) に方向変換のためのベクトルを作用させることによって簡単に求められる。

③ 最小二乗法の適用

現場計測変位と式 (6) より計算される変位との間に最小二乗法を適用し、最適な初期応力パラメータを決定する。つまり、計測変位と計算変位との残差の二乗和を最小にする初期応力パラメータを求める。残差の二乗和は次の式で求められる。

$$S = (\{U\} - \{u\})^T (\{U\} - \{u\}) \quad (7)$$

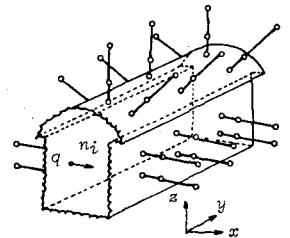
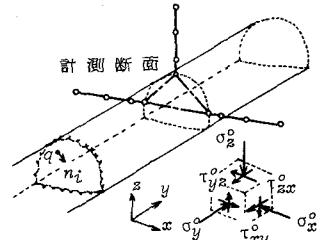


図-2 地下空洞

ただし、 $\{U\}$ は計測された変位、 $\{U\}$ は式 (6) より導かれる理論モデルの変位で次の式のように表わせる。

$$\{U\} = [F]\{\sigma^*\} \quad (8)$$

ただし、 $[F]$ は $\{F_i(p_j)\}$ より構成される行列である。計測数を N 個とすると、 $\{U\}$ 及び $\{U\}$ は $N \times 1$ の列ベクトル、 $[F]$ は $N \times 6$ (二次元の場合 $N \times 3$) の長方形行列となる。ポアソン比を与えれば、初期応力パラメータは次式によって求めることができる。

$$\{\sigma^*\} = ([F]^T[F])^{-1}[F]^T\{U\} \quad (9)$$

上式によって求められた初期応力パラメータより、主応力方向が容易に決定される。

④ 初期応力及びヤング係数の推定

式 (9) によって求められたパラメータは、初期応力とヤング係数の比である。そこで、初期応力のどれか一つを仮定すれば、残りの初期応力とヤング係数が求められる。通常 σ_z^* を土盛り圧と考えて差しつかえないので、これを与えると、ヤング係数及び初期応力は次の式で求められる。

$$E = \sigma_z^* / \sigma_z^*, \quad \sigma_x^* = E * \sigma_x^*, \text{ etc...} \quad (10)$$

ただし、 σ_z^* は土盛り圧、 $\sigma_x^* = \sigma_x^* / E, \text{ etc...}$ である。

⑤ 相対変位の取扱い

これまで、絶対変位に対して論述してきたが、計測される変位は、一般に、相対変位である。相対変位を考慮する場合は、絶対変位から相対変位へ変換する行列 (成分は 0, 1, -1) を作成し、式 (8) に作用させれば、上記の方法を容易に適用することができる。なお、ここで開発したプログラムを DBAP-B (Direct Back Analysis Program by Boundary Element Method) と名付ける。

4. 変位計測点の最適位置について

ここでは、初期応力パラメータを最も精度良く求めることのできる計測位置 — 最適計測位置 — を検討するため、一つの問題に対して、いくつかの計測パターンを考慮し、計算機による数値シミュレーションを行なう。一般に、現場で測定した変位は種々の要因によりばらつきを持つため、求められる初期応力パラメータもばらつく。そこで、パラメータの精度を表す指標として、正解値からのばらつきの度合を表す変動係数を採用する。これは、入力データ (本解析では計測変位) が正規分布に従い、互いに独立な確率変数であれば、誤差伝播の法則より容易に求めることができる (式 (9) において、初期応力パラメータは計測変位と線形関係にあることに注意)。シミュレーションは、以下の手順に従って行なう。なお、計算は簡単のために

図-3 に示す二次元平面ひずみ問題を取り扱う。

- ① 初期応力パラメータを与えて ($\sigma_x^* = 0.5 \times 10^{-3}$, $\sigma_z^* = 1.0 \times 10^{-3}$, $\tau_{xz}^* = 0.2 \times 10^{-3}$)、通常の弾性解析を行なう。

- ② 計測値は、① で求めた変位を平均値とし、与えられた変動係数に対して、ばらつきを持つ変位とする。

- ③ 逆解析を行ない、初期応力パラメータの標準偏差を正解値で除し、それを解の精度の指標とする。

図-4 及び 5 は、計測パターンの例を示したもので、それぞれに対する結果を表-1 及び 表-2 に示す。図中、矢印は計測される相対変位の方向を示し、一点鎖線は内空変位を、実線上の黒点は地中変位の測点である。表中、計測数は各測定パターンにおける総計測変位の数であり、() 内の数字はその内の内空変位の数である。また、 S_x , S_z , S_{xz} は、それぞれ初期応力パラメータ σ_x^* , σ_z^* , τ_{xz}^* の変動係数で、表中の値は、計測変位の変動係数 S_0 が 1.0 の場合に対するものであり、任意の S_0 に対する値は、(表中の値) $\times S_0$ とすればよい。図-4 及び 表-1 において、1-a は、各測点で二方向の相対変位を測定したもので、パラメータはいずれも同程度の精度で求められる。それに対し、1-b において、 S_{xz} は、 S_x, S_z に比べて著しく大きい値を示す。したがって、この場合、主応力及びその方向を正しく評価できない。この原因として、一測線上で、測線方

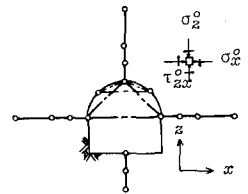


図-3 解析モデル

向の変位のみを計測する場合、せん断の情報を得にくいことが考えられる。1-cは、1-bにおいて、各測線の計測数を一つずつ減らし、内空変位の測線を3増した計測パターンである。この場合、 S_{xx} が著るしく改良されるのは注目されよう。1-dは、空洞下方に測点を設けた場合であるが、その結果は1-bと大差ない。以上の事より、この例題において、地中変位を測線方向にのみ測定するならば、空洞下方に測点を設けるより内空変位の測線を増せばよいことがわかる。図-5及び表-2は、斜め45°(上方)に測線を設ける場合の計測パターンと結果である。また、図-6及び表-3は、内空変位のパターンと結果である。これらについては、紙面の都合上、当日、説明する。

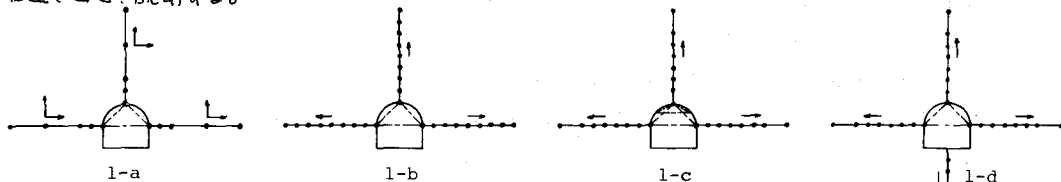


図-4 計測パターン 1

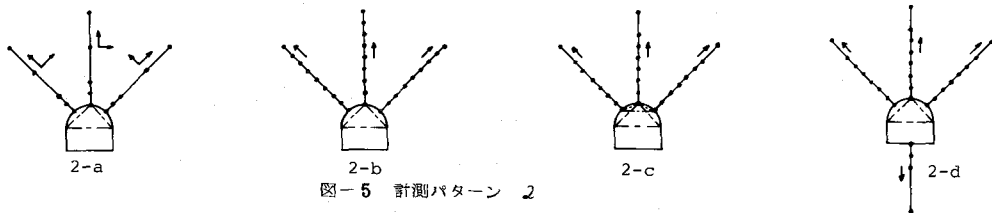


図-5 計測パターン 2

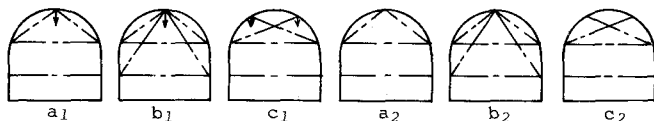


図-6 内空変位の計測パターン

表-2 初期応力パラメータの変動係数 2
(表の値に変位の変動係数をかける)

	2-a	2-b	2-c	2-d
計測数	27(3)	27(3)	27(6)	27(3)
S_x	0.4912	0.5350	0.5135	0.5455
S_z	0.3221	0.2866	0.4595	0.2914
S_{xx}	0.7882	0.8454	0.3344	0.9150

表-3 初期応力パラメータの変動係数 -内空変位-
(表の値に変位の変動係数をかける)

	a1	b1	c1	a2	b2	c2
計測数	5	7	6	4	6	4
S_x	0.4815	0.4580	0.4384	0.5663	0.4616	1.1368
S_z	0.7304	0.6047	0.6220	1.3482	0.7809	3.4428
S_{xx}	1.3863	1.0975	1.3183	1.3863	1.0975	1.4648

表-1 初期応力パラメータの変動係数 /
(表の値に変位の変動係数をかける)

	1-a	1-b	1-c	1-d
計測数	27(3)	27(3)	27(6)	27(3)
S_x	0.4508	0.3318	0.5057	0.3590
S_z	0.4873	0.3606	0.4477	0.3514
S_{xx}	0.5324	1.3927	0.4303	1.4011

5. おさび

本報告では、現場の変位計測結果を評価する一方法を提案すると同時に、変位の計測点の最適位置について若干の考察を、一つの例題を通して行った。その結果、次のような知見を得た。

- 1) 地中変位を測線方向にのみ計測する場合、初期応力パラメータのせん断成分を正しく評価できない事がある。
- 2) 1)のような場合、内空変位の測線を増すことにより、せん断成分の精度の向上が図れる。
- 3) 天端下方の計測により、初期応力パラメータの鉛直成分の精度の向上が図れる。
- 4) 内空変位の測線は、90角形をつくるように設けるのが良い。

なお、ここに提案した方法はすでに、有限要素法を用いて定式化され、実際の問題に適用されている⁵⁾。

参考文献

- 1) NATMの計測指針に関する調査研究報告書、日本トンネル技術協会、昭和54年
- 2) 佐々木、R.H.他; Identification of Nonlinear Elastic Solids by a Finite Element Method, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol.14, 1974, pp.121
- 3) 藤田、久田; 逆変分原理による構造物の形状決定問題、機械学会論集、第44巻、381号、昭和53年、pp.1469~1477
- 4) Cividini, A.他; Some Aspects of 'Characterization' Problems in Geomechanics, Int. J. Rock Mech. & Min. Sci., Vol.18, 1981
- 5) 桜井、武内; トンネル工事における変位計測結果の評価法、土木学会論文報告集(投稿中) pp.487~503

(37) Optimal Location of Field Measurements in Underground Openings

By N. Shimizu*
& S. Sakurai**

Summary

This paper presents a discussion on the optimal location of measurement points of displacement measurements for monitoring the stability of underground openings.

In the first part of the paper, an evaluation method of field measurements is presented. This method can estimate the initial stresses and the elastic modulus of the ground by means of back analysis of measured displacements.

The back analysis is formulated by boundary element method (BEM) and a linear least square method is used under an assumption of Poisson's ratio. The developed computer program here is named DBAP-B (Direct Back Analysis Program by BEM).

Finally, the optimal location of field measurements is discussed through the results of some numerical simulations for illustrative examples. The conclusions are as follows :

- 1) In some cases the shear component of the initial stresses cannot be evaluated correctly with only line-wised displacement measurement.
- 2) The measurement of convergences improves the accuracy in estimation of the shear component.
- 3) The displacement at the crown is important to estimate the vertical component of the initial stresses.
- 4) The measurement lines of convergences should form at least one polygon.

* Research Associate, Dept. of Civil Engineering, Kobe Univ., Japan

** Professor, Dept. of Civil Engineering, Kobe Univ., Japan