

(28) 逆問題の考え方と地盤工学への適用

京都大学工学部 大西 有三
京都大学大学院 東出 明宏

1. はじめに

岩盤や地盤を弾性体とみなして解析を行ったり、浸透流解析を行なう場合に最も大きな問題となるのは、入力値としての岩盤や地盤の弾性係数、ポアソン比や透水層の透水係数といった物性値を推定することである。このことは一般に、parameter identification (パラメーターの同定) と呼ばれるが、従来は Fig. 1 に示すような手順で作業

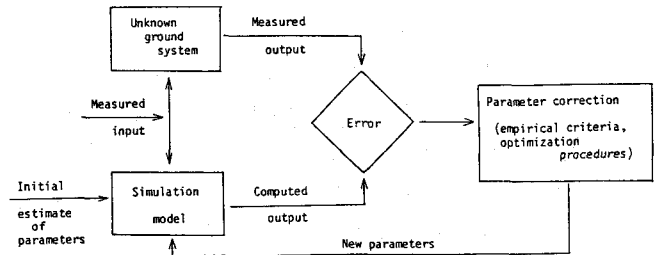


Fig. 1

が行われてきた。この図からわかるように、まず実際の岩盤や地盤に対して解析用のモデルを設定し、そのモデルに対してまだ未知であるパラメーターを実験等から推定して初期値として導入する。ここでは実際の岩盤・地盤においては、変位あるいは水頭値が測定されているものとする。そしてこの実測値とモデルより得られる計算値とを比較して、その誤差が許容される程度であればその初期値がそのまま実際の岩盤・地盤のパラメーターとなるわけであるが、もし許容範囲を超えていれば経験則などによって修正を行ない、新しいパラメーターを再度モデルに適用して実測値と計算値との誤差が許容範囲内に落ちつくまで繰り返すという、いわゆる trial-and-error (試行錯誤) で calibration (検定) を行なってきた。

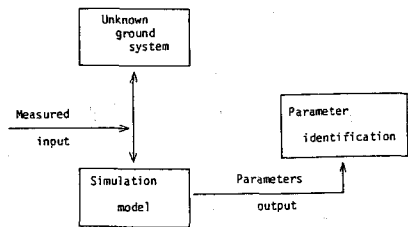


Fig. 2

これに対して、逆問題というのは文字通り従来の方とは逆の手順で解析していきこうとする手法である。これは Fig. 2 に示すように、実際の岩盤や地盤から得られる実測値を設定されたモデルに入力し、これよりいきなりパラメーターを求めようとするものである。以上のことから、"calibration" と呼ばれる手法がパラメーター同定への "indirect (間接的)" なアプローチと呼ばれ、"inverse problem (逆問題)" と呼ばれる手法が "direct (直接的)" なアプローチと称することがしばしばある。ところで、現在地盤工学においては現場計測を活用した情報化施工が脚光を浴びている。これは工事を進めながら、地盤や構造物の変位・応力などを観測しこの観測値から地盤の物性値を推定し、この結果に基づいて施工を進めるものであり、この場合でも地盤定数の決定が大きな課題となっている。このような状況においても逆問題の手法を適用できれば、ある程度ブラックボックス的ではあるが、実測値をもとに未知のパラメーターを同定できるので実用計算上きわめて有益と思われる。そこで、ここではまずその第1歩として2次元弾性モデルを設定して地盤定数を求める問題について検討を行なう。

2. 境界要素法による逆問題の定式化 ^{(1),(2)}

境界要素法 (Boundary Element Method ; B.E.M.) は、場を支配する微分方程式を解くのに、有限要素法では領域内部を要素に分割して取り扱うのに対して、閉曲境界上の積分方程式に帰着させて解を求める新しい数値

解析手法である。この方法は有限要素法にくらべ取り扱う代数方程式の次元が小さく、計算コストの低減が可能となる。また有限要素法を適用する上での問題となっていた、熱・電磁場を含む問題や無限領域を含む問題にもより有効なことがわかり、応用範囲は拡大の一途をたどっているのが現状である。ここでは境界要素のうち最も取り扱いの簡単な一定要素を用いて、逆問題の定式化を行なう。

まず、平面ひずみ状態にある2次元弾性問題に対する境界要素法の基礎式は次式で表わされる。

$$c^i u_k^i + \int_{\Gamma} u_k P_{ek}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} P_k u_{ek}^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_{ek}^* d\Omega \quad \dots (1)$$

u_k^i : 点*i*における*k*方向の変位

c^i : 定数

P_k : 境界*Γ*上の任意の点における*k*方向の応力ベクトル

P_{ek}^* : *ℓ*方向に作用する単位力により生じた*k*方向の応力ベクトル

u_{ek}^* : *ℓ*方向に作用する単位力により生じた*k*方向の変位

b_k : 領域*Ω*内の任意の点での*k*方向の物体力ベクトル

u_k : 境界*Γ*上の任意の点における*k*方向の変位

物体力ベクトル

この式は、境界上の一点に対して成り立つ式である。しかしながら、この式において $c=1$ とおけば、領域内部の点に対しても成立する。この式に対する基本解は、次式で与えられる。

$$u_{ek}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \Delta_{ek} - \frac{\partial r}{\partial x_e} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \quad \dots (2)$$

$$P_{ek}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu) \Delta_{ek} + 2 \cdot \frac{\partial r}{\partial x_e} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_k} \right\} - (1-2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_e} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_e \right) \right] \quad \dots (3)$$

n : 物体表面の法線

Δ_{ek} : Kronecker のデルタ

n_j : 方向余弦

r : 負荷点と考えている点との距離

G : セン断弾性係数

ここではパラメーターとして、 G と ν を用いる。ただし、

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \dots (4)$$

以上の式より出発して一定要素についての定式化を行なっていき、最終的に得られる*N*個の境界節点に対する全体系の方程式をマトリックス表示すると、次式のようになる。

$$[H_{ij}] \{u_j\} = [G_{ij}] \{P_j\} + \{B_i\} \quad \dots (5)$$

これが2次元弾性問題に対する境界要素法の基本式である。この式において、 $\{u_j\}$ は変位ベクトル、 $\{P_j\}$ は表面力ベクトルであり、 $[H_{ij}]$ 、 $[G_{ij}]$ は有限要素法の基本式における全体剛性マトリックスに対応するものである。また $\{B_i\}$ は物体力ベクトルを表わすが、ここでは物体力を0とするのが好みになる。

$$[H_{ij}] \{u_j\} = [G_{ij}] \{P_j\} \quad \dots (6)$$

したがって次式から変位が計算される。

$$\{u_j\} = [H_{ij}]^{-1} [G_{ij}] \{P_j\} \quad \dots (7)$$

ところで、従来の逆問題の解析手法においては、入力条件として全節点ごの観測変位が必要とされることが多かったが、実際の地盤においては境界要素法はともかくも有限要素法の場合に全節点ごの変位を観測することは不可能である。そこでこの問題を解決するため全節点の観測変位データを必要としないような定式化が必要となり、そうして考えられたのが数値計画法の手法である。

今、式(6)における $[H_{ij}]$ 、 $[G_{ij}]$ の中の地盤定数 G 、 ν が未知であり、変位 u_j のうちのいくつかを観測値として与えられているとする。そこで、式(7)に最小二乗法を適用すると、 G と ν は次式を満足するように求めら

けるはずである。

$$J = \sum_k (U_k - \bar{U}_k)^2 = \sum_k \left\{ [H_{ij}]^{-1} [G_{ij}] \left\{ P_j \right\} \right\}_k - \bar{U}_k \right\}^2 \rightarrow \text{minimum} \quad \dots (8)$$

ここで、 k は $j=1, 2, \dots, M$ のうち変位が観測されている番号で、 $\bar{U}_k$ は観測変位、 k はベクトル中の k 番目の要素を表す。ただし G 、 ν は式(8)を満足しなければならない。

$$G > 0 \quad \text{ならば} \quad 0 < \nu \leq 0.5 \quad \dots (9)$$

式(8)において未知数は G 、 ν の二つであるので、2次元弾性問題における逆問題解析は、式(9)を制約条件とし式(8)を目的関数とする最適化問題を解くことに等しくなる。この場合、目的関数は G 、 ν に対して非線形となっているので非線形最適化問題の解析手法が必要となる。非線形最適化問題を反復計算によって解く探索法は、直接探索法と勾配探索法の二つに大別される。 $f(x)$ を目的関数としたとき、点 x^k における関数値 $f(x^k)$ のみを使うのが直接探索法であり、 $f(x)$ が連続で微分可能な場合に $f(x)$ の勾配 $\partial f(x)/\partial x$ を使うのが勾配探索法である。そして最適化手法として有名な共役勾配法は後者に属するわけであるが、この手法では $\partial J/\partial G$ 、 $\partial J/\partial \nu$ とした勾配を求めるために非常に煩雑な計算が必要となる。そこで、ここでは前者の直接探索法のうち代表的なシンプレックス法を適用することとした。この手法は、最適解が制約条件によって与えられる凸な許容領域の端点にあることを利用したものである。

3. 解析結果および考察

解析モデルとして、平面ひずみ状態の等方等質弾性地山内に半径 $\alpha = 5\text{ m}$ の円形素掘りトンネルを設定し、そのトンネル掘削後の二次応力状態にある地盤の解析を行なった。Fig. 3 に示すように24の一定要素に分割し、境界条件も図に示す。このモデルに対して Table 1 の入力値を考え、通常の解析手法で全節点における変位および表面力を求めた。そして逆問題解析手法の適用性を検証するため、求められた変位のうちのいくつかの節点での変位のみを入力することによって地盤の定数 G と ν を推定しようと試みた。

[Case - 1]

節点 1, 2, 3, 4, すなわちトンネル壁面での方向変位および y 方向変位が与えられたものとして、 G と ν を求めた。初期値により次の2通りの結果が得られた。

(a). 初期値 $G_0 = 1.0 \times 10^6$; $\nu_0 = 0.2$

この場合の結果は、Table 2 に示されている。目的関数 J の値が試行回数に応じて減少していく様子が明らかである。そして G と ν は試行回数50回目ではほぼ正解に達し、66回目で目的関数の値が最小となり収束しており、満足の良い結果である。

(b). 初期値 $G_0 = 1.0 \times 10^6$; $\nu_0 = 0.3$

この場合の試みは、一般に G と ν を比較した場合 G にくらべて ν のとり値の範囲は非常に小さく、たとえば飽和粘土が非排水条件のもとでは $\nu = 0.5$ とみなされるようにある程度予想を立てることが可能である。そこで ν の初期値として正解を与えた場合の結果は、

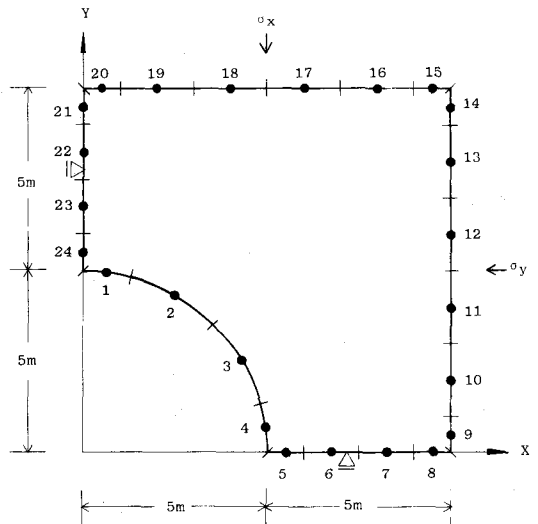


Fig. 3

Table 1

Shear modulus	=	0.3846×10^5 (tf/m ²)
Poisson's ratio	=	0.3
σ_x (水平地圧)	=	1.0×10^2 (tf/m ²)
σ_y (垂直地圧)	=	0.4×10^2 (tf/m ²)
側圧係数	=	0.4

Table 3 である。Table 2 とくらべると収束するまでの試行回数が多くなっている。しかし、ほぼ 66 回目で正解に一致している。

[Case - 2]

ここでは節点 15, 16, 17, 18, 19, 20 での方向変位および方向変位が与えられている。Case - 1 と同様、次の 2 通りの結果を得た。

(a). 初期値 $G_0 = 1.0 \times 10^6$; $U_0 = 0.2$

Table 4 が結果である。Case - 1 (a) と同じ回数で正解に達していることがわかる。

(b). 初期値 $G_0 = 1.0 \times 10^6$; $U_0 = 0.3$

Table 5 が結果である。Case - 1 と同様、その正解を初期値として入力した場合の方が収束するまでの試行回数が多くなっている。

4. あとがき

以上の解析結果より次の結論が得られる。

- 並解析により得られる地盤定数の値は、初期値の G が正解と 1 オーダーも違っていてもかみならず、正解にほとんど一致している。
- 節点変位を入力する節点を変えても得られる値はほとんど変化せず、試行回数が若干の差がみられるだけである。

しかし今回の解析結果には 1 つ疑問点が残った。それは通常最適化問題においては、初期値が正解に近いほど収束するまでの試行回数が少なくなるはずであるが、その正解を初期値とした場合の方が試行回数が多くなっており、得られた解の精度やパラメータの感度分析を含めて今後検討しておく必要がある。また、現時点では地盤の材料特性を線形弾性に限定しているが、非線形弾性、弾塑性問題への拡張も考慮しなければならないと考える。

(参考文献)

- 1) 荒井克彦, 錦見若二, 太田秀樹: 情報化施工における有限要素パラメータの逆算について, 第 16 回土木工学研究発表会, 1981, pp. 809 - 812
- 2) C.A. ブレミア: 境界要素法入門, 培風館, 1980

Table 2

Iteration	Shear modulus G (tf/m ²)	Poisson's ratio ν	Objective function J
0	1.00000 $\times 10^6$	0.200000	
2	0.99800 $\times 10^6$	0.200300	0.38984 $\times 10^{-2}$
10	0.81112 $\times 10^6$	0.231404	0.38252 $\times 10^{-2}$
30	0.44047 $\times 10^5$	0.357718	0.29002 $\times 10^{-3}$
40	0.38670 $\times 10^5$	0.298846	0.17327 $\times 10^{-5}$
50	0.38508 $\times 10^5$	0.299739	0.84179 $\times 10^{-8}$
66	0.38459 $\times 10^5$	0.299931	0.13496 $\times 10^{-10}$
Solution	0.38460 $\times 10^5$	0.300000	

Table 3

Iteration	Shear modulus G (tf/m ²)	Poisson's ratio ν	Objective function J
0	1.00000 $\times 10^6$	0.300000	
2	0.99800 $\times 10^6$	0.300450	0.38920 $\times 10^{-2}$
10	0.81112 $\times 10^6$	0.347130	0.38213 $\times 10^{-2}$
20	0.53612 $\times 10^6$	0.414574	0.37054 $\times 10^{-2}$
30	0.92659 $\times 10^5$	0.358284	0.15011 $\times 10^{-2}$
40	0.41719 $\times 10^5$	0.326666	0.56145 $\times 10^{-4}$
49	0.38326 $\times 10^5$	0.302306	0.26911 $\times 10^{-6}$
66	0.38460 $\times 10^5$	0.299938	0.25845 $\times 10^{-10}$
74	0.38459 $\times 10^5$	0.299935	0.13775 $\times 10^{-10}$
Solution	0.38460 $\times 10^5$	0.300000	

Table 4

Iteration	Shear modulus G (tf/m ²)	Poisson's ratio ν	Objective function J
0	1.00000 $\times 10^6$	0.200000	
2	0.99800 $\times 10^6$	0.200300	0.88994 $\times 10^{-3}$
10	0.81112 $\times 10^6$	0.231404	0.87347 $\times 10^{-3}$
20	0.67149 $\times 10^5$	0.357608	0.27602 $\times 10^{-3}$
30	0.60485 $\times 10^5$	0.350157	0.21868 $\times 10^{-3}$
42	0.37614 $\times 10^5$	0.300447	0.56001 $\times 10^{-6}$
50	0.38443 $\times 10^5$	0.299743	0.27644 $\times 10^{-8}$
66	0.38463 $\times 10^5$	0.299920	0.43237 $\times 10^{-10}$
Solution	0.38460 $\times 10^5$	0.300000	

Table 5

Iteration	Shear modulus G (tf/m ²)	Poisson's ratio ν	Objective function J
0	1.00000 $\times 10^6$	0.300000	
2	0.99800 $\times 10^6$	0.300450	0.88117 $\times 10^{-3}$
10	0.81112 $\times 10^6$	0.347130	0.85311 $\times 10^{-3}$
20	0.48012 $\times 10^6$	0.430865	0.72441 $\times 10^{-3}$
30	0.47426 $\times 10^6$	0.430637	0.72352 $\times 10^{-3}$
42	0.13057 $\times 10^6$	0.397980	0.57719 $\times 10^{-3}$
50	0.37354 $\times 10^5$	0.303078	0.22050 $\times 10^{-5}$
66	0.38443 $\times 10^5$	0.299875	0.40175 $\times 10^{-9}$
82	0.38463 $\times 10^5$	0.299920	0.44227 $\times 10^{-10}$
Solution	0.38460 $\times 10^5$	0.300000	

(28) INVERSE PROBLEMS IN ROCK MECHANICS

Yuzo OHNISHI
Akihiro HIGASHIDE
(Kyoto University)

Mathematical models of groundwater flow or rock mass behavior have in the past decade evolved into powerful tools for studying the geotechnical problems. The well-known major impediment to wider use of such models is that the required distributions of system parameters are difficult to obtain. Usually the best available information is an approximate description of geometry of rock structures or aquifer and some arbitrarily distributed field measurement (observations) collected during field tests.

Local parameter values can be calculated by traditional methods only under the assumption of homogeneity. For an inhomogeneous medium, the distributed parameters are mostly obtained by a trial and error process, called "model calibration", in which an estimated set of parameters is successively adjusted until the model satisfactorily reproduces the observed field data.

Attention is being directed toward solving the inverse problem in the analysis of rock mechanics. The objective in the solving the inverse problem is to determine a set of parameters from a set of observed displacements. In the example of a tunnel convergence, the elastic modulus and poisson's ratio are set to the unknown parameters. Simplex method was introduced to optimize the solution.

Numerical method used in the research to solve the problem of tunnel convergence is Boundary Element Method. Several examples are shown to evaluate the identified parameters by inverse solutions.