

(24) 層状岩盤上の構造物の境界・有限要素解析

信州大学工学部 〇三井 康司 名古屋大学工学部 市川 康明
名古屋大学工学部 尾原 祐三 名古屋大学工学部 川木 眺万

1. まえがき

最近注目されている境界要素法 (BEM) は無限領域を表現するためには適切な手法といえ、種々の工学的数値解析に利用されており、地盤工学における適用も多々見られる¹⁾。一方従来より多用されている有限要素法 (FEM) は、異方性体、非線形材料特性等を容易に取り込めるといふ大きな長所を有しており、その汎用性は大である。このような見地より、与えられた問題の形状、境界条件、材料特性等により、両者の長所を生かして BEM と FEM とを併用して解析しようとする考え方はごく自然のものといえ、その利用価値は大きい²⁾。

本研究はこの Coupling 手法を層状岩盤上の構造物の解析に適用しようとするものであり、主として比較的均一な無限体と考えられる層状地盤には境界要素を、構造系には有限要素を用いて解析する。なお、水平多層地盤を取り扱った理論的研究はあるが^{3), 4)}、複雑な境界条件を有するもの、あるいは構造物との相互作用問題等を解析対象とする場合は数値解析手法に依らざるを得ない⁵⁾。

BEM の適用に際し、領域毎に材料定数の異なる連続体に対しては、異領域の相対する境界上の変位、力の釣合い条件より、全体系のマトリックスを組み直す必要があり、これがプログラミング上かなり煩雑なものになっている。これを避けるため、本研究では、この異領域間に接合要素を使用している。この接合要素を導入することにより、層間のすべり等の相対変位をも考慮することが可能である。接合要素は種々の改良されたものが提起されてはいるが⁶⁾、本文では最も取り扱い方の容易と思われる R.E. Goodman らの提案した Joint 要素⁷⁾を使用し併せて層状地盤に適用した際のこの要素の性状による影響を考察した。

2. 解析概略

境界要素、有限要素および Joint 要素の Coupling 手法の概略を述べる。

図-1 に示す連続体は F E 領域 (Ω_F)、B E 領域 (Ω_B)、J E 領域 (Ω_J) の 3 領域より構成されるものとする (添字は図-1 を参照されたし)。

Coupling の根本思想は相対する内部境界で変位、力の適合、釣合い条件を満足させることにあり、たとえば、 Ω_F と Ω_B の内部境界 Γ_I で変位ベクトル、節点力ベクトルが $\tilde{u}_{FB} = \tilde{u}_{BF}$, $\tilde{f}_{FB} + \tilde{f}_{BF} = 0$ の関係にあることを使用する。しかしながら、1) Ω_B を F E とみるか (equivalent finite element type)、2) Ω_F を B E と考えるか (equivalent boundary element type) によって 2 通りの定式化が考えられる²⁾。本研究では 1) の手法を用いたが、これは現有の FEM のプログラムがほとんど無修正で使用できると、全体系剛性方程式を再配列する必要がないこと等による。以下 1) の定式過程を記述する。

まず Ω_F では $\tilde{u}$ と $\tilde{f}$ の間に通常の式 (1) が成立する。ここに K は剛性マトリックスである。次に Ω_B では $\tilde{u}$ と traction $\tilde{t}$ との間に式 (2) の関係がある。なお H 、 G は B E 手法における基礎解、内挿関数より数値積分可能な係数マトリックスである。式 (2) の係数マトリックスを式 (3) のようにおいて式 (2) の両辺に $(G^{-1})^{-1}$ をかけ、さらに $\tilde{t}$ を $\tilde{f}$ に変換するために式 (5) の変換マトリックス M を用いると結局式 (1)

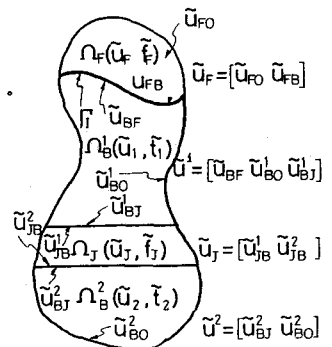


図-1 変数の定義

$$\begin{bmatrix} K_{FO} \\ K_{FB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{FO} \\ \tilde{u}_{FB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{FO} \\ \tilde{f}_{FB} \end{bmatrix} \quad \dots \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} H_{BF} & H_{BO} & H_{BJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{BF} \\ \tilde{u}_{BO} \\ \tilde{u}_{BJ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{BF} & G_{BO} & G_{BJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{t}_{BF} \\ \tilde{t}_{BO} \\ \tilde{t}_{BJ} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$H' = [H_{BF} \ H_{BO} \ H_{BJ}] \quad G' = [G_{BF} \ G_{BO} \ G_{BJ}] \quad (3)$$

と類似の式(4)が得られることになる。式(4)を通常のFEMと同様の手順で全体剛性マトリックスに重ね合わせればよい。なお、式(5)は $\tilde{u}$ 、 $\tilde{t}$ および境界形状の内挿関数 N より計算される係数マトリックスである。

$$M^i (G^i)^{-1} H^i \begin{bmatrix} \tilde{u}_{BF} \\ \tilde{u}_{BO} \\ \tilde{u}_{BJ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{t}_{BF} \\ \tilde{t}_{BO} \\ \tilde{t}_{BJ} \end{bmatrix} \quad (4)$$

B E領域 Ω_B にJoint要素を挿入する場合はFE手法と全く同様の手順で全体剛性マトリックスへの重ね合わせを施せばよく、結局図-1で示す全体剛性マトリックスの内容は式(6)のようである。

$$M = \int_{\Gamma} N_i^T N_i \, d\Gamma_i \quad (5)$$

本研究で利用した境界要素はLinear要素であり、数値積分はすべてGaussの8点求積公式で行った。以上のように1)の手法はFEMと同様の手順でプログラムでき

$$\begin{bmatrix} K_{FO} \\ K_{FB} + M_{BF}^T G_{BF}^{-1} H_{BF} \\ M_{BO}^T (G_{BO}^i)^{-1} H_{BO} \\ M_{BJ}^T (G_{BJ}^i)^{-1} H_{BJ} + K_{JB} \\ K_{JB} + M_{BJ}^T (G_{BJ}^i)^{-1} H_{BJ} \\ M_{BO}^T (G_{BO}^i)^{-1} H_{BO} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{FO} \\ \tilde{u}_{FB} \\ \tilde{u}_{BO} \\ \tilde{u}_{BJ} \\ \tilde{u}_{JB} \\ \tilde{u}_{BO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{t}_{FO} \\ 0 \\ \tilde{t}_{BO} \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{t}_{BO} \end{bmatrix} \quad (6)$$

る利点はあるが、一方、 G の逆行列を求めなければならず、cpu timeの点で難点がある。

3. 数値計算例

3.1 一層地盤上のフーチングの解析 フーチングの弾性係数 E をパラメータにして、フーチングの剛性を考察する。図-2はフーチング部分を18の有限要素で、下部地盤を41の境界要素で離散化したものであり、地盤内には45の内部点を指定してある。図-3は垂直荷重が作用したときのフーチング底面の垂直変位を種々の α について計算したものである。 $\alpha = 30$ ではほぼ同一の変位をしており、 $\alpha = 100$ で

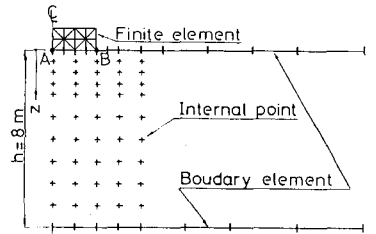


図-2 FE分割図

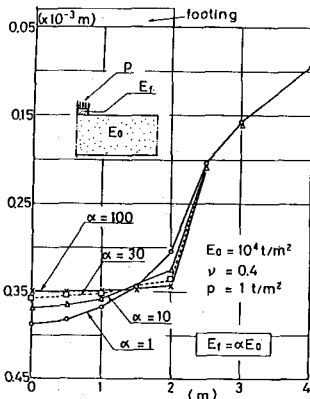


図-3 垂直変位

表-1 垂直変位 ($\times 10^{-3}$ m)

α	a)A	b)B	a)-b)	(a)-b)/a) (%)
1	0.387	0.305	0.082	21
100	0.350	0.343	0.007	2

表-2 計算ディテール

Method	Node	Element	Internal Point
a)Coupling	183	244	94
b)FEM	725	672	—
a)/b)	0.25	0.36	—

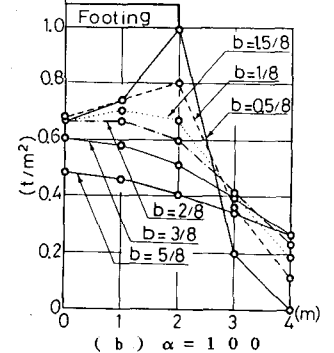
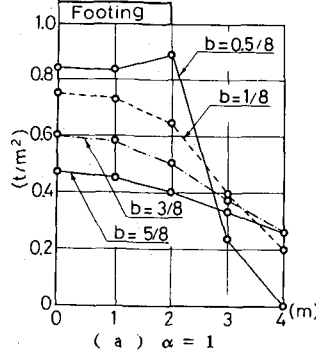


図-4 主応力 (σ_2) 分布

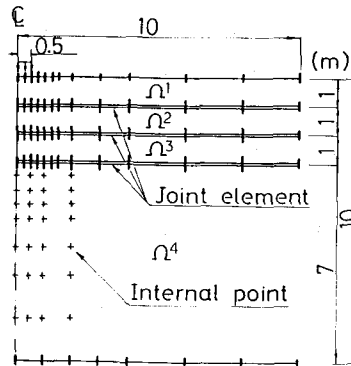


図-5 分割図 (Coupling)

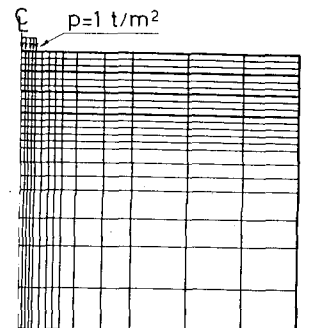


図-6 分割図 (FEM)

は完全に剛体に近い変位をしていることがわかる。表-1はフーチング下面A、B点の変位差をみたものである。図-4は地盤内の主応力分布(σ_2)を示している。応力伝播状態をみると、 $\alpha=1$ の場合は $b(z/h)=1/8$ で滑らかな伝達状態となっているが、 $\alpha=100$ では $b=2/8$ 位で滑らかとなる。このことは地盤応力状態が α に関連することを示し、また $\alpha=100$ の場合では、フーチング角部周辺で応力集中の顕著であることもわかる。

3.2 層状地盤の解析 図-5に示す4層地盤上に垂直、水平荷重が作用したときの応力解析を行う。同図は要素分割状態を示したものであり、載荷位置近傍は応力集中が考えられ、細かく分割している。各層間では22個のJoint要素が挿入してある。図-6は比較のために行ったFEMの分割図である。両者の計算ディテールを表-2に示す。本計算例ではFE計算に較べ要素数、節点数とも約1/4で済み、入力データ上かなり経済的であることがわかる。しかし、cpu時間は逆に大となった。以下に示すものはすべて4層とも材料定数の同一なものに対する計算結果である。

図-7は層上に垂直荷重が作用したとき、Joint要素の k_n (垂直剛比)を一定(10^6 t/m^3)、 k_s (接線剛性)をパラメータとした場合の地盤表面の垂直変位である。 k_s が小なる場合は下層地盤への応力伝播の効果が少ないため、垂直変位が大となることがわかる。図-9に荷重中心線に沿う垂直変位を示した。 $k_s=1 \sim 3000 \text{ t/m}^3$ 位では層間の変化が滑らかでない。この検討のために荷重端点下の第1~2層間のJoint要素の上下節点の垂直、水平変位を比較してみたが、垂直変位は k_s の値にかかわらずほとんど一致している。また表-3は水平変位に対するものであるが、 $k_s=1 \sim 10^4 \text{ t/m}^3$ ではかなりの差があることがわかる。 $k_s=10^5 \text{ t/m}^3$ ($k_s/G_0=30$)ではほとんど差がなく剛結接合となっている。以上の垂直荷重に対する詳細な検討

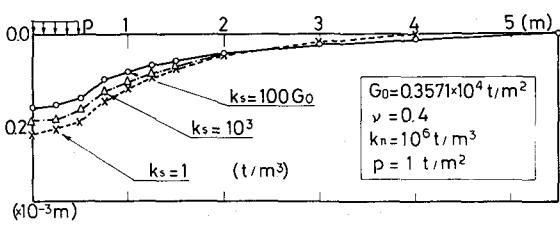


図-7 地盤表面垂直変位

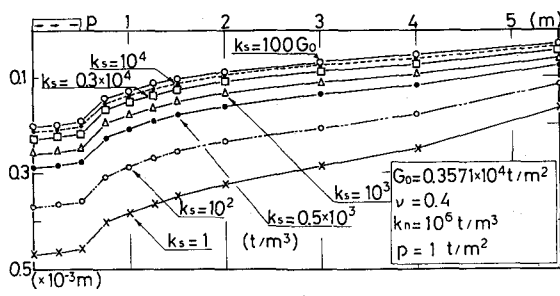


図-8 地盤表面水平変位

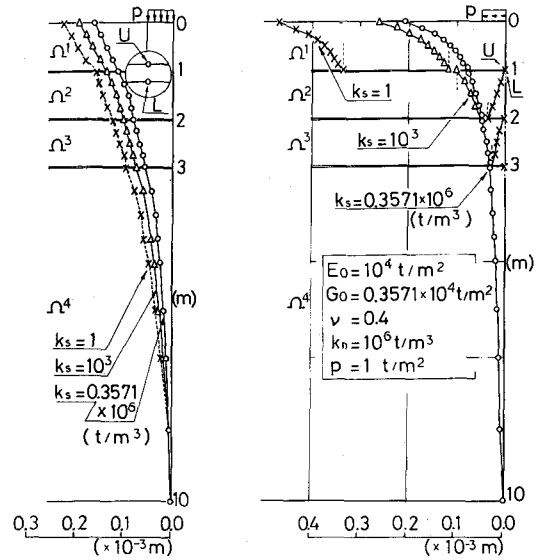


図-9 垂直変位

図-10 水平変位

表-3 垂直荷重によるJointの水平変位

Case	k_s		k_n (t/m^3)	Horizontal displacement (10^{-4} m)		(a)-b)/a) (%)
	(t/m^3)	(k_s/G_0)		a) Upper joint	b) Lower joint	
1	1	$0.28 \cdot 10^{-3}$	10^6	0.351	$0.459 \cdot 10^{-1}$	87
2	10^3	0.28	10^6	0.219	$0.479 \cdot 10^{-1}$	78
3	$0.3 \cdot 10^4$	0.84	10^6	0.162	$0.822 \cdot 10^{-1}$	49
4	10^4	2.8	10^6	0.128	$0.998 \cdot 10^{-1}$	22
5	10^5	$0.28 \cdot 10^2$	10^6	0.111	0.108	3
6	$0.3571 \cdot 10^6$	10^2	10^6	0.110	0.109	1

$G_0 = 0.3571 \cdot 10^4 \text{ t/m}^2$

は文献5)で行われている。

つぎに水平荷重に対する同様な計算を行う。図-8、10はそれらの水平変位を示したものである。 $k_s = 1 \text{ t/m}^3$ では第1～2層間で、Joint要素の水平力に対する抵抗力がないため、固結接合の約2倍の水平変位が生じている。表-4に荷重中心線、第1～2層間のJoint要素の水平変位を示す。同表より $k_s = 10^4 \text{ t/m}^3$ でほぼ固結接合であることがわかる。

表-4 水平荷重による Jointの水平変位

Case	k_s		k_n	Horizontal displacement (10^{-3} m)		(a-b)/a (%)
	(t/m^3)	(k_s/G_0)		a)Upper joint	b)Lower joint	
1	1	$0.28 \cdot 10^{-3}$	10^6	0.335	$0.440 \cdot 10^{-2}$	100
2	10^2	$0.28 \cdot 10^{-1}$	10^6	0.227	$0.846 \cdot 10^{-1}$	100
3	$0.5 \cdot 10^3$	0.14	10^6	0.141	0.107	24
4	10^3	0.28	10^6	0.115	0.103	10
5	$0.3 \cdot 10^4$	0.84	10^6	$0.927 \cdot 10^{-1}$	$0.921 \cdot 10^{-1}$	6
6	10^4	2.8	10^6	$0.832 \cdot 10^{-1}$	$0.838 \cdot 10^{-1}$	1
7	10^5	$0.28 \cdot 10^2$	10^6	$0.791 \cdot 10^{-1}$	$0.792 \cdot 10^{-1}$	0
8	$0.3571 \cdot 10^6$	10^2	10^6	$0.788 \cdot 10^{-1}$	$0.798 \cdot 10^{-1}$	0

$$G_0 = 0.3571 \cdot 10^4 \text{ t/m}$$

なお、図-7、8の全ケースでFEM計算を行ったが、両者の差は最大変位で数%以内であった。また層状間で材料定数の異なる場合等の数値解析も行ったが、結果は当日発表する。最後に本文中の数値計算はすべて名古屋大学大型計算機センターのFACOM M-200で行ったことを付記する。

4. あとがき

本研究はBEMとFEMとのCoupling手法を用いて、フーチング、層状地盤問題を取り扱ったものであり、得られた結果を要約するとつぎのとおりである。

(1) 比較的均一な層状体にBEMを用いて解析することは、解析対象全領域にFEMを適用するより、要素数、節点数とも小さくなり、データ作成上有利である。(2) 材料定数が異なる領域を境界要素で離散化する際、異領域間にJoint要素を挿入して解析する手法がプログラミング上取り扱い易い。また、層間のすべり等の相対的変位を取り扱うことも可能である。(3) R.E.GoodmanらのJoint要素を異領域間の固定結合要素として使用する際、 k_n 、 k_s の値はおおの、100E、100G位が適当と思われる。(4) BEMとFEMとのCouplingにおいては、FEMをBEMの一種と見なし、tractionによる節点間の釣合いから、全体剛性マトリックスへ重ね合せた方がcpu timeの節約になると思われる。その点からいうと、本研究で用いたようなGの逆行列を用いる手法はあまり効率のよいものとは思われない。

本研究で取り扱った数値計算例は比較的基本的なものである。最も効果的なCoupling問題は複雑な構成式を有する媒体に対してのみFEMで、その他の均一体に対してはBEMで離散化するようなものであろう。トンネル周辺の塑性領域の拡がり、No-tention材料における繰返し計算等を今後の課題としたい。

参考文献

- 1) G. グーデフス編；岩盤力学の有限要素解析2，川木・桜井・足立（共訳），森北出版，1982，pp. 205～244.
- 2) C. A. Brebbia and S. Walker；Boundary Element Techniques in Engineerings, Newnes - Butterworths, 1980, pp.180～184.
- 3) 植下・G. G. Meyerhof；多層地盤における弾性変位について，土木学会論文集，第144号，1967，PP. 20～26.
- 4) V. Maury；Lesmilieux Stratifies-Experiences et calculs, Ed Dunod, Paris, 1970.
- 5) 川木・林；成層体の応力・変形状態について，第9回土質工学研究発表会，昭和49年，pp. 757～760.
- 6) 山田・江澤；接合要素とその有限要素解析における応用，生産研究，31巻6号，1979，pp. 1～6.
- 7) R. E. Goodman, et al.；A Model for the Mechanics of Joint Rock, Proc. ASCE, Vol. 94, No. SM 3, 1968, pp. 637～659.
- 8) H. G. Poulos and E.H. Davis；Elastic Solutions for Soil and Rock Mechanics, John Willy and Sons, 1974, pp. 103～110.

(24) Coupled Boundary - Finite Element Analysis of
Structures on Multi - Layered Strata

Y. Mitsui
Dept. of Civil Eng.,
Shinshu Univ.

Y. Ichikawa, Y. Obara, T. Kawamoto
Dept. of Geotechnical Eng.,
Nagoya Univ.

A boundary element analysis coupled with finite elements is proposed to simulate structural behaviours of a footing on horizontal multi-layers. The analysis involves two types of finite elements, that is, the constant strain triangle(C.S.T.) and the Goodman's joint. The Goodman's joint elements are built in between layers, then contacted behaviours of layers can be easily culculated. That is, shearing slips between layers are aptly described by this procedure under several conditions of the filled interface materials.

The major advantages to use the Boundary Element Method (BEM) is that it requires only boundary discrization of each homogeneous zone, and it is able to account for an infinite region. On the other hand, the Finite Element Method(FEM) is possible to specify the local properties of Materials which are even nonlinear. Thus the coupling of two methods ennables us to solve quite large fields of engineering problems.

Further investigations are expected for nonlinear analysis of the layer and the interfacial materials.