

(22) クラック・テンソルによる不連続性材料の力学的性質

埼玉大学工学部 ○鈴木 健一郎, 鈴木 啓之
小田 匡寛

1. まえがき

岩盤の力学的挙動は、断層・節理などのクラックに深く係わっていることがよく知られている。その事を考慮した解析手法の開発が岩盤力学の重要な研究課題とされている。しかし、実際の岩盤において、特にクラックの幾何学性は非常に複雑な様相を呈しているのが常であり、室内の実験・解析結果を原位置の岩盤に利用する為には、克服しなければならない多くの問題が残されている。小田らは既に、クラック・テンソルという考え方を導入し、複雑なクラックの幾何学性を統一的に表現しうる事を示した。この研究は、更にクラック・テンソルの適用性を実験的に明らかにする目的で石膏供試体によるモデル実験を行、た結果を報告するものである。

2. クラック・テンソル

小田ら¹⁾によると、クラック・テンソル F_{ij} は次式で定義される。

$$F_{ij} = \frac{1}{4} \pi r^3 \int_0^\infty \int_{\Omega/2} r^2 n_i n_j E(r, r) d\Omega dr \quad (1)$$

ただし、 r : クラックを円と仮定した時の直径

$E(r, r)$: クラックの単位法線ベクトルが r で、直径が r である確率密度関数

Ω : 立体角

F_{ij} は、2階対称テンソルで、クラックの幾何学性に依存することからそれをクラック・テンソル F_{ij} と呼ぶ。クラック・テンソル F_{ij} は座標変換に対して不変な三つの量を持ち、その偏差についても更に三つの不変量を持っている。図1は、主応力空間と同様な、 F_{ij} の主値空間を考えたものである。図中 OA を含む軸は主応力空間における等方応力軸に相等する等方性軸である。今、或る構造点 P で表わされたとすると、長さ $\overline{AP}$ ($=I$) は等方性軸からの距離、即ち異方性の程度を示し、これは偏差クラック・テンソルの第二不変量 I_2 ($=I^2/2$) に関係する。また長さ $\overline{OA}$ ($=A$) は、クラックの等方成分の大きさであり、クラック密度を概念的に示していて、 F_{ij} の第一不変量 I_1 ($=\sqrt{3}A$) に関係する。ここでは、クラックの幾何学的性質は、クラック・テンソル F_{ij} から決定される次の三つの量で評価できるものとする。

- ① I_1 : クラック密度 (F_{ij} の第一不変量)
- ② I : 異方性 (等方軸からの距離)
- ③ α : クラック・テンソルの主軸方向

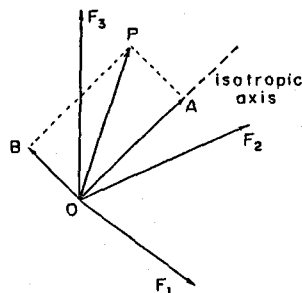


図 1

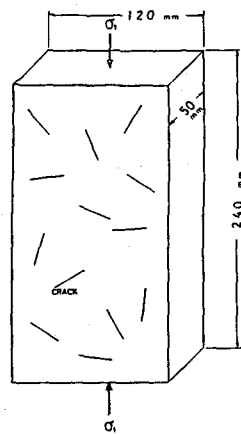


図 2

3. 実験

クラック・テンソル F_{ij} が材料の力学的性質とどのような関係にあるかを明らかにする為に以下に示す石膏供試体によるモデル実験を実施した。石膏を直方体供試体を作り、その中にスノーマットという紙を挿入

して人工的なクラックを作る。(図2)スノーマットは両面がコートされ滑らかな面を持っていて、石膏とスノーマットとの境界をクラックとみなした。クラックは、供試体の奥行きに対して一定であり、図の正面に対しては常に垂直である二次元的なモデルである。石膏自体の強度を変える実験以外、水と石膏の重量比を2対3とし、それを標準供試体として一軸圧縮試験を行った。変位はコンタクトゲージ(1/1000 mmのタイヤルゲージ付)を用いて少なくとも三方向測定すること、供試体の歪 ϵ を求めた。

4. 結果及び考察

クラック・テンソルの第一不変量 I_F の意味を調べる為に等方性標準供試体について一軸圧縮試験を行った。図3は、強度と I_F の対数の関係を示している。(ただし、各強度はクラックを含まない供試体の強度(158 kg/cm²)で無次元化している。)図の中には、クラックの大きさが一定で、個数を変えたAシリーズ、個数一定で大きさを変えたBシリーズ、個数も大きさも任意であるCシリーズを同時に含んでいる。いずれも $\log I_F$ が増加するに伴い強度が線型的に減少しているのが注目される。このことから、Budianskyら²⁾のクラック密度と一致するFijの第一不変量は、クラックの平均密度を量的に表わしていると考えてよさそうである。又、破壊状況の観察によると、最も危険なクラックからの割れ目の発生は、直ちに材料の破壊を意味するものでなく、供試体全体に割れ目がある程度進展した後に破壊に至る事がわかる。つまり破壊強度はクラックの平均的な量、例えば I_F のような量に支配されると考えられる。図4に示す二つの供試体はまったく異なるクラックパターンを持つように見えるが、 I_F は共に0.56、異方性の程度を表す Γ 、及びクラック・テンソルの主軸と応力テンソルの主軸との成す角 α はほぼ等しい。即ちクラック・テンソルの観点からすると、見掛けの違いにもかかわらず両供試体の差は認められない。この二つの供試体の強度はそれぞれ40 kg/cm²と37 kg/cm²とほぼ等しい値となっていて、クラック・テンソルの有効性を示唆している。

水と石膏の混合重量比を、7対10、3対4、5対6、9対10と変えることで石膏自体の強度を変えて一軸圧縮試験を行った。その結果を図5に示すが、図3と同様な線型な関係が認められる。従って、図3、5に示される特徴は、石膏の硬軟に依存しないことが確かめられた。

次に等方軸からの距離を与える Γ とクラック・テンソルの主軸と応力テンソルの主軸との成す角 α の意味について調べた。図6は二つのシリーズについて、 α と強度の関係を示している。両シリーズのFijの第一不変量は共に0.28と同じである。しかし0を示した

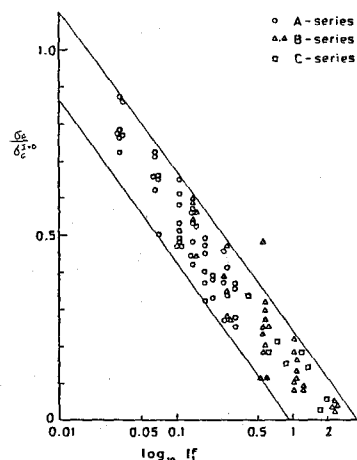
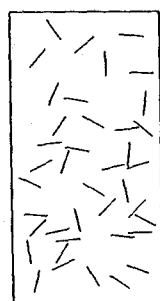
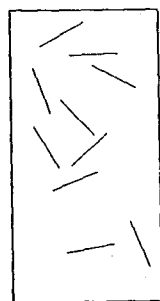


図 3



$$\begin{aligned} I_F &= 0.56 \\ \Gamma &= 0.083 \\ \alpha &= 74^\circ \\ \sigma_c &= 40 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} I_F &= 0.56 \\ \Gamma &= 0.093 \\ \alpha &= 81^\circ \\ \sigma_c &= 37 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

図 4

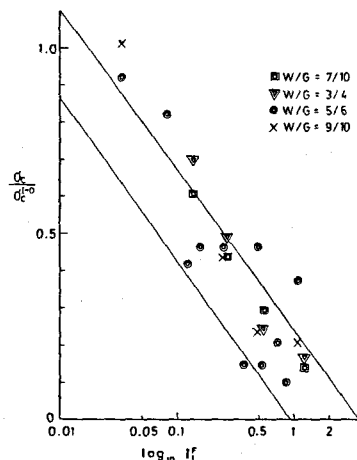


図 5

シリーズの供試体は△を示したとれより大きい I^F を持つ、ている点がある、ている。図6によると、 α の値により強度は明らかに異なっていて、明らかな強度異方性が認められる。しかし I^F が小さくなると、即ち、等方軸に近づくとき α による強度の変化は小さくなっていることも同時に明らかである。即ち、クラック・テンソルが等方軸に近づくほど強度は α に影響をあまり受けないが、等方軸から離れるほど α により大きな影響を受けるようになる、と云える。

図7の縦軸は、同じ I^F を持つ供試体の平均強度で個々の供試体の強度を割った強度比を示し、横軸は I^F を取、ている。 I^F が小さい領域、即ちクラックが等方的であると考えられる領域では強度比は1に近く、各供試体の平均強度からの隔りは実験誤差であるが、 I^F が大きくなるに従って、つまり I^F が等方軸から離れるに従って強度のバラつきが大きくなっている。このことから、供試体の力学的異方性の程度は、 I^F に依存している、と結論して良さそうである。即ち、同じ I^F をもつものでも異方性の程度を示すと考えられる I^F が大きくなると、クラック・テンソルの主軸と応力テンソルの主軸の成す角 α の値により強度に明確な違いが出て、強度異方性が重要となると云える。

次に変形係数と第一不変量 I^F との関係を調べた。図8は、 I^F と初期弾性域でのヤング率との関係である。縦軸はクラックを含まない供試体のヤング率($4.00 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$)でクラックを含む個々の供試体のヤング率を無次元化して示している。小田³⁾は、クラックに付随する負荷方向の歪 $\epsilon_{ij}^{(c)}$ と平均応力 σ_{ii} との間には近似的に次のような式が成り立つことを示した。(ただし、理論ではクラックの形状はpenny-shapeと、クラック相互の弾性的相互干渉は無視できるものとしている。)

$$\epsilon_{ij}^{(c)} = C_{ijkl}^{(c)} \sigma_{kl} \quad (2)$$

ただし、 $C_{ijkl}^{(c)} = (4/3\pi E_0)(\delta_{il}F_{jk} + \delta_{jl}F_{ik} + \delta_{ik}F_{jl} + \delta_{jk}F_{il})$

今、一軸圧縮試験を考えると上式は、

$$\epsilon_{11}^{(c)} = \frac{16}{3\pi E_0} F_{11} \cdot \sigma_{11} \quad (3)$$

となる。ただし、 E_0 は石膏自体のヤング率、 F_{11} は圧縮方向を1とした時の F_{ij} の成分である。また、石膏部分の弾性歪を $\epsilon_{11}^{(m)}$ とすると $\epsilon_{11}^{(m)}$ は次式で与えられる。

$$\epsilon_{11}^{(m)} = \sigma_{11} / E_0 \quad (4)$$

更に供試体の全歪は $\epsilon = \epsilon^{(c)} + \epsilon^{(m)}$ と考えると、クラックを含む材料の見掛けのヤング率 E は次式で与えられる。

$$E/E_0 = 1 / (1 + \frac{16}{3\pi} F_{11}) \quad (5)$$

今、等方的クラックを持つ、供試体に限って考えると、

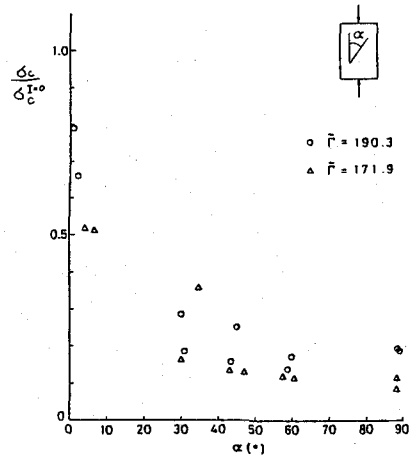


図 6

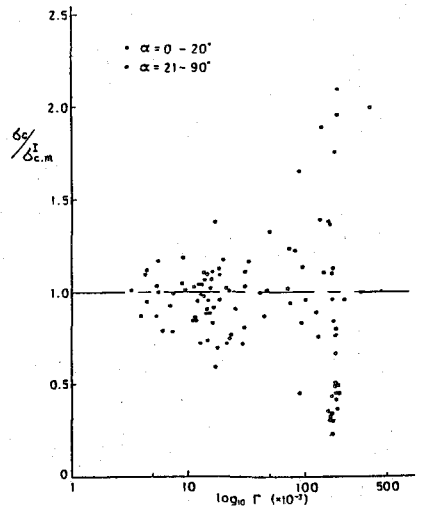


図 7

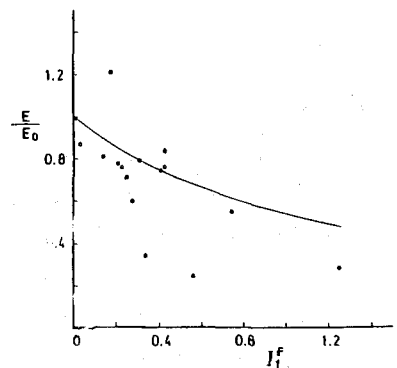


図 8

$I_1^F = F_{11} + F_{22} = 2F_{11}$ であるので、上式は

$$E/E_0 = 1 / \left(1 + \frac{8}{3\pi} I_1^F \right) \quad (6)$$

となり、図8の曲線によってそれを示している。ただし(6)式の I_1^F の係数は、クラックを penny-shape と仮定して誘導されたものであり、石膏供試体のクラックは二次元的である点に注意。このような限界があるが、同図に示した実験値と式(6)は、定性的にかなりよく一致を示していると見てよい。 I_1^F が大きい領域では、クラック間の相互干渉が無視できなくなり、実験値と(6)式の隔りが表われる可能性も残されている。

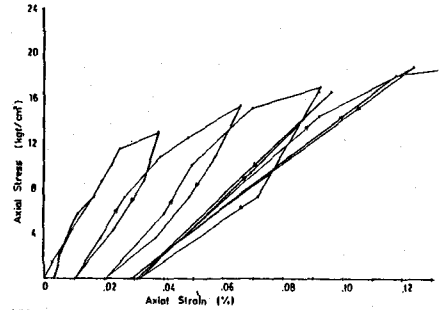


図 9

図9は、繰返し試験の応力～歪関係である。図にみられるように新しいクラックが入った後の応力～歪関係は、次第に緩傾斜になっていて、クラック・テンソルの変化が起こった事を示している。そこで新しいクラックが入るごとに除荷し、その都度新しいクラックの長さ及び方向を測定し、初期のクラック・テンソルに重ね合わせて F_{ij} の変化を調べてみた。変化したクラック・テンソルの第一不変量 I_1^F とそれに対応するヤング率の関係を図8と同様に整理して、図10に示す。 I_1^F が増加するに伴い、ヤング率が低下している様子が表わされている。これから、クラック・テンソルの第一不変量 I_1^F は変形係数を述べる上でも有効な指標となり得ると云へる。

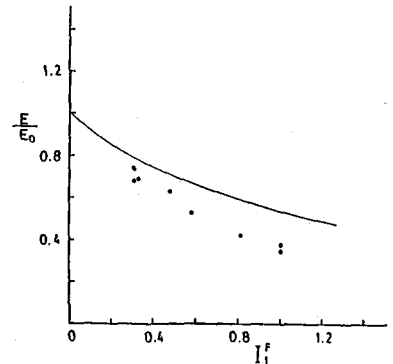


図 10

5. 結論

- 1) クラック・テンソルの第一不変量 I_1^F は、平均の強度および変形を述べる上での指標として適当である。
 - 2) クラック・テンソルの偏差第二不変量に関係する量 I_2 は、異方性の程度を述べる上での指標となり、平均の強度や変形からのバラつきを述べるには、これと同時にクラック・テンソルの主軸と応力テンソルの主軸との成す角 α が大切なパラメーターとなっている。
- 以上の事が確認され、これらより、クラック・テンソルはクラックの幾何学性を統一的に表現しうる量として十分有効であると結論できる。

参考文献

- 1) 小田, 鈴木, "クラック・テンソルによる不連続性岩盤のモデル化に関する研究" 1983, 第15回岩盤力学に関するシンポジウム
- 2) Budianski, B. and O'Connell, "Elastic moduli of a cracked solid" 1976, Int. J. Solids Structures, 12, 91
- 3) Oda, M. "A method for evaluating effect of crack geometry on mechanical behavior of rock masses with random cracks" Mechanics of Materials (in preparation)

(22) CRACK TENSOR FOR DISCONTINUOUS MATERIALS AND
ITS EFFECT ON THEIR MECHANICAL PROPERTIES

Saitama University Suzuki, K.
Oda, M.
Suzuki, H.

Abstract

A second rank tensor F_{ij} called crack tensor has been introduced to show crack geometry for discontinuous geological materials. Uniaxial compression tests on gypsum plaster samples with random cracks are reported to examine the applicability of crack tensor in practice, with the following conclusions.

- 1) The first invariant of crack tensor F_{ij} is important as an index measure for evaluating the crack intensity which is related to the number and dimension of cracks.
- 2) The measure Γ which is deduced from the second invariant of the deviatoric part shows a distance from an isotropic crack system. It is important as an index for measuring the degree of anisotropy due to the preferred alignment of discontinuity, and is powerful to evaluate the mechanical anisotropy of cracked materials.
- 3) The principal axes of the crack tensor are identical to the principal axes of crack anisotropy. There is no doubt that the principal axes as well as the measure is very important in the analysis of anisotropy of anisotropic discontinuous materials.