

(21) クラック・テンソルによる不連続性岩盤のモデル化に関する研究

埼玉大学工学部 ○小 田 匡 寛
鈴木 健一郎

1. はじめに

岩盤の力学的性質は、ジョイント・断層のようなクラックに依存する。天然のクラックの幾何学的・力学的性質は、極めて複雑であり、岩盤の力学的挙動にどのような影響を及ぼすかを一般性を失わないように評価することは至難なことでとされている。この研究は、複雑かつ多様なクラックの幾何学性とテンソル量で表わし（クラック・テンソルと呼ぶ）、岩盤の力学的挙動の解析を容易ならしめようとするものである。

幾何学的に複雑なクラックを含む岩盤を、いかにコンピューターが普及・発達しているとはいえ、直接解析の対象にすることは不可能に近い。解析を可能にするには、クラックの幾何学性に関する一般性を失わない単純化が不可欠である。このような単純化に際し、なんらかの指導原理を確立することが不可欠であるが、クラック・テンソルの概念の導入は、以下に示すように一つの拠り所を与えようとするものである。従来から、設計の基礎資料として岩盤の地質調査・ボーリング調査より、割れ目の方向・傾度について詳細な情報が得られてゐる。しかしそれらの資料は、直接的に岩盤の力学的解析に用いられることは無く、定性的な判断材料に止まったり、場合によっては、目の目を見ないこともあるように聞いている。ここで提案するクラック・テンソルは、これら調査資料を効果的に活用して、信頼性の高い岩盤のモデル化や、さらに進んで力学的解析の有効な手段を提供しようとするものである。

2. クラック・テンソルの定義

岩盤の力学的性質は、大雑把にいって次の三要素に依存していると考えてよい。

- ① クラックの幾何学性（クラック密度、クラックの大きさの分布、クラックの方向分布）
- ② クラックの物理性・力学性（せん断剛性、垂直剛性、摩擦角、クラック拡大係数）
- ③ クラックを含まないマトリックスの力学性（強度、ヤング率、ポアソン比）

ここで議論しようとしているクラック・テンソルは、①の項目を扱うのであって、②のクラックの物理性、力学性を議論するものではないことを前もって注意しておきたい。またクラック・テンソルの定義は、文献1), 2), 3) に詳しい。ここでは必要最小限の範囲で要約する。

面積 S の平面的広がりを持つクラックを次のように単純化する。クラックの位置は、その圆心の座標で与える。クラックの形は、一般に複雑であろうが、圆心に中心を持つ円に近似できるものとする。するとクラックの大きさは直径 $r = 2\sqrt{S/\pi}$ で記述できる。今、統計的にみて homogeneous と見なせる十分な大きさの体積 V を考え、その中にクラックの圆心が $m^{(v)}$ 個あるとすると、クラックの体積密度 ρ として、

$$\rho = m^{(v)} / V \quad (1)$$

が定義できる。またクラックの大きさの分布は、 r の密度関数 $f(r)$ で与えられる。クラック面に立てた単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とする。（ただし、各クラックに方向が完全に反対な二つのクラック面があり、従って一つのクラックに二つの $\mathbf{n}$ が定義される。）今、クラック面の方向分布を密度関数 $E(\mathbf{n}, r)$ で与える。ただし $E(\mathbf{n}, r)$ は、

$$\int_0^\infty \int_\Omega E(\mathbf{n}, r) d\Omega dr = 1 \quad (2)$$

を満足する。ここで $d\Omega$ は微小な立体角であり、 Ω は単位球の全表面に等しい立体角である。一つの基底ベクトル $\mathbf{e}_i$ を導入する。各クラックに定義されている二つの $\mathbf{n}$ の中から、 $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{e}_i = n_i \geq 0$ の条件を満足する $\mathbf{n}$ を選んで、それをクラックに付随する単位ベクトルとする。すると $m^{(v)} \int E(\mathbf{n}, r) d\Omega dr$ は、クラックに付随するベクトル $\mathbf{n}$ が微小立体角 $d\Omega$ にあり、かつ直径が $r \sim r+dr$ の微小な範囲にある、体積 V 中のクラック数を与えることとなる。ただし微小立体角 $d\Omega$ は、 $\mathbf{e}_i$ と同じ向きに半球上にあるものとする。以下の議論で、 $m^{(v)} \int E(\mathbf{n}, r) d\Omega dr$

で表わされるクラックを、便宜的に (n, r) -クラックと呼ぶことにする。また定義から明らかにように、

$E(n, r) = E(-n, r)$ の対称性を示し、また n と r が統計的に独立な確率変数ならば、 $E(n, r) = E(n) f(r)$ と書ける。

基底ベクトル e_i に平行な長さ $x^{(i)}$ の調査線 (ボ-リング孔に匹敵) を引いてみる。クラックの一部はこの調査線と交わり、その交わり方はクラックの平均的な幾何学性に依存するはずである。この調査線と交わるクラックの各々に新しいベクトル m を割りあてる。ただし m は各クラックの n に平行で (ただし $n \cdot e_i \geq 0$)、また各クラックの直径 r に等しい大きさを持つてゐる。このように定義された m を調査線に沿つて重ね合わせ、合ベクトル $M (= \sum m)$ を作る。合ベクトル M は、互いに直交する三つの基底ベクトル $e_i (i=1, 2, 3)$ に対し次の成分を持つてゐる。

$$F_{ij} = \pi p/4 \int_0^\infty \int_n r^3 n_i n_j E(n, r) dn dr \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (3)$$

(3) 式の F_{ij} は無次元でかつ二階の対称テンソルであり、クラックの幾何学性に依存することから、クラック・テンソルと呼ぶことにする。同種のテンソル量は、たとえば佐武⁴⁾ や Kachanov⁵⁾ によつても導かれてゐる。特に Kachanov のクラック密度テンソル α_{ij}

$$\alpha_{ij} = \frac{\pi p}{4} \sum_{k=1}^{\infty} (S^{(k)})^{3/2} n_i^{(k)} n_j^{(k)} \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (4)$$

は、(3) 式と等価であるが、幾何学イメージよりもむしろ力学的考察を踏まえた直感から得られたものである。

(3)、(4) 式の二階のテンソルだけでクラックの複雑な幾何学的特徴を余す所なく表現できるものは云々も無い。それらは一つの近似に過ぎず、より細部の構造をも量的に表わしたければさらに高階のテンソルが必要となる。(3) 式の類推によつて、たとえば四階のテンソル F_{ijkl} は

$$F_{ijkl} = \pi p/4 \int_0^\infty \int_n r^3 n_i n_j n_k n_l E(n, r) dn dr \quad (i, j, k, l=1, 2, 3) \quad (5)$$

と定義できる。

3. クラック・テンソルによる岩盤の力学特性の評価

クラックを含む材料のクラック・テンソル F_{ij} が既知であるとすると、それからどのような材料の力学的性質を引き出すことができるのであろうか？ 現在まで行なつてゐる F_{ij} と力学的性質との関連性に関する理論的、実験的研究を整理すると次のように要約できる。

1) F_{ij} のトレースは、クラックの平均密度を量的に示してゐて、岩石の間隙率と等価な意味を持つてゐる。等方的にクラックが入る場合、材料の一軸圧縮強度 σ_c は $\log(\text{tr} F_{ij})$ と強い線型な相関関係にあり、それはちょうど岩石における σ_c と間隙率の關係に酷似してゐる。

2) F_{ij} の偏差テンソル $D_{ij} (= F_{ij} - \frac{1}{3} F_{kk} \delta_{ij})$ は、材料の力学的異方性と推定するための指標と考えてよく、また力学的異方性の主軸は、クラック・テンソルの主軸と一致してゐる。

3) 材料の弾性域で生じる全歪増分 $\Delta \epsilon_{ij}$ をクラックの無いマトリックスの弾性歪増分 $\Delta \epsilon_{ij}^{(0)}$ とクラックによる歪増分 $\Delta \epsilon_{ij}^{(c)}$ に分けて考えよう。今、 $\Delta \epsilon_{ij}^{(c)} = C_{ijkl}^{(c)} \Delta \sigma_{kl}$ で $\Delta \epsilon_{ij}^{(c)}$ と $\Delta \sigma_{kl}$ の關係を書くと、クラックの弾性コンプライアンス $C_{ijkl}^{(c)}$ は、モデルの構成によつて F_{ij} や F_{ijkl} の関数として表現できる。一例として、最もシンプルな $C_{ijkl}^{(c)}$ を示すと⁶⁾、

$$C_{ijkl}^{(c)} = \frac{1}{2D} (\delta_{il} F_{jk} + \delta_{jl} F_{ik} + \delta_{ik} F_{jl} + \delta_{jk} F_{il}) \quad (6)$$

と書ける。ただし δ_{ij} はフロネッカーのデルタであり、 D はクラックの形や応力の不変量に依存するパラメーターである。(6) 式の誘導は、クラック相互の弾性干渉を無視するなどの大胆な単純化の結果得られたものであってその適用には限界があらう。しかし、(6) 式はクラックの幾何学性に弾性コンプライアンスに及ぼす影響を定性的ながら具体的に示してゐて大変興味深い。四階のテンソル $C_{ijkl}^{(c)}$ は、orthorhombic な対称性を持ち、その対称性の主軸は、 F_{ij} の主軸と完全に一致してゐる。

4. 原位置の岩盤のクラック・テンソルの推定法

クラック・テンソルの定義式には、クラックの体積密度 ρ 、大きさ・方向分布 $E(\mathbf{n}, r)$ などの諸量が使われた。しかし残念なことにこれらの量は、原位置の岩盤を対象とした場合、決定し難いように思われる。原位置の岩盤評価にクラック・テンソルを利用する目的のためには、それを定義するだけでは不十分であって、岩盤のクラック調査から求め得るものとななければならない。ここでは幾何統計学の助けを借りて F_{ij} を測定可能な量で表わしてみる。問題を単純化するために二つの仮定をしておく。① $\mathbf{n}$ と r は統計的に独立な確率変数である。

$$E(\mathbf{n}, r) = E(\mathbf{n})f(r) \quad (7)$$

(一般論を云えば、 $\mathbf{n}$ は r に従属するとみるべきである。しかしクラックを数個のグループに分割すると、各グループごとで $\mathbf{n}$ と r の独立性の仮定が採用できる場合も多いであろう。このような場合、各グループの $F_{ij}^{(v)}$ を別個に決めて、最後にそれらを重ね合わせて全体の F_{ij} を得ることが出来る。) ② $E(\mathbf{n})$ は既知である。(ルーチンの岩盤調査から $E(\mathbf{n}, r)$ を決めることは不可能である。しかし $E(\mathbf{n})$ は比較的容易に求められる。即ち、可能な限りランダムにクラックをサンプリングし、その方向分布に適合するように $E(\mathbf{n})$ を決めればよい。)

4.1 ボーリンク孔のクラック調査

一つの基底ベクトル $\mathbf{e}_i$ に平行な長さ $x^{(i)}$ の調査線は既知な方向に施されたボーリンクに相当する。この調査線に交わるクラックの個数 $N^{(i)}$ は、次式で推定できることが示されている。

$$\frac{N^{(i)}}{x^{(i)}} = \frac{1}{4} \pi \rho \int_0^\infty \int_{\Omega/2} r^2 n_i f(r) E(\mathbf{n}) d\Omega dr \quad (8)$$

上式の $N^{(i)}/x^{(i)}$ は、単位長さあたりのクラック数に等しく、ボーリンク調査を調べるべき点に注意してほしい。

4.2 崖面でのクラック調査

一つの基底ベクトル $\mathbf{e}_i$ に垂直な崖面を考えよう。各クラックは、もしその中心が十分崖面に近ければ、崖と交わり、長さ r の交線として目で観察できる。クラックの単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ (ただし $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i \geq 0$)が $d\Omega$ の微小立体角にあり、直径 r から $r+dr$ にあるクラックを $(\mathbf{n}, r)$ -クラックと呼んだ。 $(\mathbf{n}, r)$ -クラックが崖と交線を作るには、クラックの中心と崖面との距離 h は、次の不等式を満足していなければならない。(図-1)

$$r/2 \sqrt{1 - n_i^2} \geq h \quad (9)$$

交線を作るクラックの中心は、崖面の前後両側にあることに注意すると、面積 a^2 の崖面と交線を作る $(\mathbf{n}, r)$ -クラックの数は、次式で推定できる。

$$\rho r a^2 \sqrt{1 - n_i^2} 2 E(\mathbf{n}) f(r) d\Omega dr \quad (10)$$

r について0から ∞ まで、また方向について $\Omega/2$ の立体角の範囲で、(10)式を積分すれば、崖面と交線を作る全てのクラック数 $M^{(i)}$ が計算される。

$$M^{(i)} = 2 a^2 \rho \int_0^\infty \int_{\Omega/2} r \sqrt{1 - n_i^2} E(\mathbf{n}) f(r) d\Omega dr \quad (11)$$

総数 $M^{(i)}$ のクラックは、色々な $\mathbf{n}, r$ のクラックの集合であることは勿論である。そこで、その密度関数を $E^{(i)}(\mathbf{n}, r)$ とすると、それはちょうど、クラックが崖面と交わる条件つき密度関数となる。従って $E^{(i)}(\mathbf{n}, r)$ は、体積 V 中のすべてのクラックを考えた密度関数 $E(\mathbf{n}, r)$ と基本的に異なり、崖面と交わるクラックの中で、 $(\mathbf{n}, r)$ -クラックの関数は、 $E^{(i)}(\mathbf{n}, r)$ を使えば、 $M^{(i)} E^{(i)}(\mathbf{n}, r) d\Omega dr$ と書ける。

またそれは同時に(10)式にも等しいので、次式が得られる。

$$E^{(i)}(\mathbf{n}, r) = \frac{2 a^2 \rho}{M^{(i)}} r \sqrt{1 - n_i^2} E(\mathbf{n}) f(r) \quad (12)$$

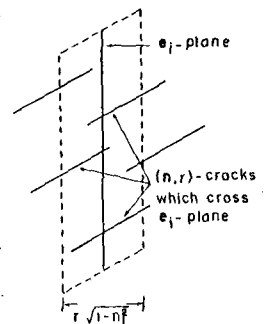


図-1

4.3 崖面での交線長さ \$t\$ の分布

さしあたり \$(n, r)\$-クラックだけに注目しよう。このクラックが、長さ \$t\$ の交線となるように崖面と交われば、\$t\$ は \$h, n_i, r\$ と次の関係を満足しなければならない(図-2)。

$$t = \sqrt{r^2 - \frac{4h^2}{1-n_i^2}} \quad (13)$$

崖面と交わるすべての \$(n, r)\$-クラックの中で、その中心が崖面から \$h\$ と \$h + \delta h\$ の範囲にあり、従って、交線長さとして \$t\$ から \$t + \delta t\$ の範囲を持つ割合 \$P^{(1)}\$ は、

$$P^{(1)} = \frac{2\alpha^2 \delta h}{\alpha^2 r \sqrt{1-n_i}} = \frac{t \delta t}{r \sqrt{r^2 - t^2}} \quad (14)$$

で与えられる。(ただし、\$\delta h, \delta t, t\$ はいずれも正となるように約束する。)すでに述べたように、\$M^{(1)} E^{(1)}(n, r) d\Omega dr\$ は、崖面と交わる \$(n, r)\$-クラックの個

数である。従ってそれに \$P^{(1)}\$ を掛けたものは、崖面と交わる \$(n, r)\$-クラックの中で交線長さが \$t\$ から \$t + \delta t\$ の範囲内にあるものの個数となる。それを \$r\$ について \$t\$ から \$\infty\$ まで、また方向について \$\Omega/2\$ の立体角で積分すれば交線長さとして \$t\$ から \$t + \delta t\$ のクラックの総数を計算できる。

$$M^{(1)} \int_t^\infty P^{(1)} E^{(1)}(n, r) d\Omega dr = M^{(1)} \Phi^{(1)}(t) \delta t \quad (15)$$

ここで \$r\$ の積分領域を \$t\$ から \$\infty\$ としたのは、\$t\$ より小さい直径のクラックは、けして \$t\$ に等しい交線長さを示さないことによる。(12), (14) 式を (15) 式に用いれば、\$\Phi^{(1)}(t)\$ として、次式を得る。

$$\Phi^{(1)}(t) = \frac{2\beta\alpha^2}{M^{(1)}} \int_{\alpha/2}^\infty \sqrt{1-n_i^2} E(n) d\Omega \int_t^\infty \frac{tf(r)}{r\sqrt{r^2-t^2}} dr = \frac{1}{\int_0^\infty rf(r) dr} \int_t^\infty \frac{tf(r)}{r\sqrt{r^2-t^2}} dr \quad (16)$$

(16) 式の右辺は、観察する崖面の方向を子える量を含んでいない。このことから、交線長さの密度関数 \$\Phi^{(1)}(t)\$ は、崖面の方向に無関係であり、従って、\$\Phi^{(1)}(t)\$ の (1) は省略してよい。(16) 式の \$r\$ に関する積分は、Abel の式として知られていて、\$n\$ 次の性質を持っている。

$$\int_0^\infty t^n \Phi(t) dt = \frac{1}{\int_0^\infty rf(r) dr} \int_0^\infty r^{n+1} f(r) dr \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta \quad (17)$$

ただし、 $\int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots n} \quad (n: \text{奇数}) \quad \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta = \frac{1 \cdot 3 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (n: \text{偶数})$

簡単のために次の記号を用いる。

$$\langle r^n \rangle = \int_0^\infty r^n f(r) dr, \quad \overline{Q(n)} = \int_\Omega Q(n) E(n) d\Omega, \quad \overline{t^n} = \int_0^\infty t^n \Phi(t) dt$$

すると、\$n = -1, 0, 1\$ とする (17) 式は次式となる。

$$\langle r \rangle = \frac{\pi}{2\overline{t^{-1}}}, \quad \langle r^2 \rangle = \frac{2\overline{t}}{\overline{t^{-1}}}, \quad \langle r^3 \rangle = \frac{3\pi\overline{t^2}}{4\overline{t^{-1}}} \quad (18)$$

すでに明らかにように \$\Phi(t)\$ は、原位置の岩盤で交線長さ \$t\$ を多数測定すれば決定できる。従って、決定された \$\Phi(t)\$ を使って \$\overline{t^{-1}}, \overline{t}, \overline{t^2}\$ が計算されれば、(18) 式の関係から \$\langle r \rangle, \langle r^2 \rangle, \langle r^3 \rangle\$ が求められる。(18) 式を (1), (3) 式に用いると、クラック密度 \$\rho\$, クラックテンソル \$F_{ij}\$ は、測定できる量で次式のように書ける。

$$\rho = \frac{1}{\pi} \frac{N^{(1)}}{\alpha^{(1)} \eta^{(1)}} \frac{\overline{t^{-1}}}{\overline{t}} \quad (19) \quad F_{ij} = \frac{3\pi}{8} \frac{N^{(1)}}{\alpha^{(1)} \eta^{(1)}} \frac{\overline{t^2}}{\overline{t}} \frac{\overline{n_i n_j}}{n_i n_j} \quad (20)$$

ただし、\$\eta^{(1)} = \int_{\Omega/2} n_i E(n) d\Omega\$ とする。

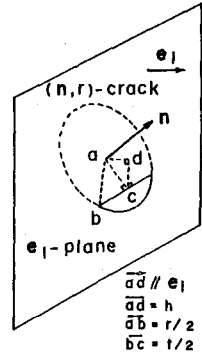


図-2

(21) HOW TO SIMPLIFY THE GEOMETRY OF DISCONTINUOUS ROCK MASSES BY CRACK TENSOR

Saitama University Masanobu Oda
Kenichirō Suzuki

Abstract

Discontinuities like faults and joints (called cracks) are of widespread occurrence in rock masses in situ, with very complicated geological setting. The complexity especially in their geometry is no doubt a major obstruction in the development of theory useful to predict the mechanical behavior of rock masses. In order to overcome the obstruction, a tensor (called crack tensor) is introduced to abstract the geometry formed by cracks without losing generality. As an example, a trial based on acceptable simplifications is successfully done to formulate an overall elastic compliance due to cracks in terms of the proposed tensor. With the help of the geometrical probability, the tensor is expressed by quantities measurable in the field by which it becomes possible to use it in the practical rocks mechanics.

References

- 1) Oda, M. (1982): Geometry of discontinuity and its relation to mechanical properties of discontinuous materials, IUTAM-Symposium on Deformation and Failure of Granular Materials, Delft, pp.53-61.
- 2) Oda, M., Nemat-Nasser, S., and Mehrabadi, M.M. (1982): A statistical study of fabric in random assembly of spherical granules, Int. Jour. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol.6, pp.95-108.
- 3) Oda, M. (1982): Fabric tensor for discontinuous geological materials, Soils and Foundations, Vol.22, No.4.
- 4) Satake, M. (1978): Constitution of mechanics of granular materials through graph representation, Theoretical and Applied Mechanics, 26, University Tokyo Press, pp.257-266.
- 5) Kachanov, M. (1980): Continuum model of medium with crack, Jour. of ASCE, EM.5, pp.1039-1051.
- 6) Oda, M. : A method for evaluating effect of crack geometry on mechanical behavior of rock masses with random cracks, Mechanics of Materials, (in preparation).
- 7) Kendall, M.G., and Moran, P.A.P. (1963): Geometrical probability, Griffin's Statistical Monographs and Courses, Hafner Publishing Co.