

軟岩の時間依存性の応力—ひずみ関係

東北大学工学部 平井 弘 義

" 佐武 正 雄

" 柳 沢 栄 司

1. まえがき

材料の時間に依存した力学挙動の定式化^{1), 2)}について著者らは2, 3の考察を行なってきた。特に塑性域における力学挙動の時間依存性を考えるため、降伏関数の提案を行ない、これより得られる結果と実験事実と比較検討し、その有用性を示した。そこにおける基本的な考え方は、材料を粘弾/塑性体としてとらえ、降伏特性が保存および散逸エネルギーを用いて表わされた規準式と関係づけられようというものである。今回時間に依存した軟岩の力学特性について上記の考え方に基づき、さらに検討を進める。特に応力—ひずみ関係に及ぼす載荷速度の影響について、本研究において与えられる降伏関数より導かれる応力—ひずみ関係と実験事実との比較を行なう。また降伏応力の載荷速度依存性とクリープ降伏応力との比較により、エネルギー規準と力学挙動の対応関係を検討する。

2. 降伏関数の提案

軟岩などのように塑性変形が静水圧に依存する材料は、保存エネルギーと散逸エネルギーのそれぞれの体積変形とせん断変形に関する部分が降伏に関係していると考えられる。そこでせん断変形に関与した保存及び散逸エネルギー³⁾から成る一次式を次のようにおく。

$$R_{dist} = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t G_1(t-t', t-t'') \frac{\partial \epsilon_{ij}(t)}{\partial t} \frac{\partial \epsilon_{ij}(t')}{\partial t'} d\tau d\tau'$$

$$- \omega \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} G_1(t-t', t-t'') \frac{\partial \epsilon_{ij}(t)}{\partial t} \frac{\partial \epsilon_{ij}(t')}{\partial t'} d\tau d\tau' \quad (1)$$

ここに t は時間、 G_1 はせん断緩和関数、 ϵ_{ij} は偏差ひずみ、 ω は材料定数である。次に体積変形に関与した部分についても同様に次のようにおく。

$$R_{dil} = \frac{1}{6} \int_0^t \int_0^t G_2(t-t', t-t'') \frac{\partial \epsilon_{ii}(t)}{\partial t} \frac{\partial \epsilon_{ii}(t')}{\partial t'} d\tau d\tau' - \omega \frac{1}{6} \int_0^t \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} G_2(t-t', t-t'') \frac{\partial \epsilon_{ii}(t)}{\partial t} \frac{\partial \epsilon_{ii}(t')}{\partial t'} d\tau d\tau' \quad (2)$$

ここに G_2 は体積緩和関数、 ϵ_{ii} は体積ひずみを示す。さて著者らが先に示した弾塑性体の降伏関数を粘弾/塑性体に拡張して次の形の降伏関数を提案する。

$$f(t) = R_{dist} + a R_{dist}^{1/2} + b R_{dil} - c R_{dil}^{1/2} - R = 0 \quad (3)$$

ここに $f(t)$ は降伏関数、 a, b, c は材料定数、 R は硬化パラメータである。

3. 降伏応力に及ぼす載荷速度の影響

主応力が $\sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_3$ なる三軸圧縮状態について考えよう。Gurtin⁵⁾らの定義する加速履歴に対して式(3)は次のようになる。

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_\lambda\left(\frac{t}{\lambda}\right) = \frac{1}{3} J_1(0) g^2 + a \left\{ \frac{1}{3} J_1(0) \right\}^{1/2} g + b \frac{3}{2} J_2(0) p^2 - c \left\{ \frac{3}{2} J_2(0) \right\}^{1/2} p - R = 0 \quad (4)$$

ここに $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_\lambda\left(\frac{t}{\lambda}\right)$ は加速履歴に対する降伏関数、 $J_1(0)$ と $J_2(0)$ はクリープ関数、 $g = \sigma_3 - \sigma_1$ 、 $p = (2\sigma_1 + \sigma_3)/3$ である。次に遅延履歴に対して式(3)は次のようになる。

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} f_2\left(\frac{t}{\lambda}\right) = \frac{1}{3} J_1(\infty) q^2 + a \left\{ \frac{1}{3} J_1(\infty) \right\}^{1/2} \\ + b \frac{3}{2} J_2(\infty) p^2 - c \left\{ \frac{3}{2} J_2(\infty) \right\}^{1/2} p \\ - R = 0 \quad (5)$$

ここに $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f_2\left(\frac{t}{\lambda}\right)$ は遅延履歴に対する降伏関数である。

先に報告したように²⁾ 一例として堆積軟岩の実験結果を用いて、次のように材料定数が求められる。

$$\left. \begin{aligned} J_1(0) &= 6.25 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{kgf} \\ J_2(0) &= 2.38 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{kgf} \\ J_1(\infty) &= 1.25 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{kgf} \\ J_2(\infty) &= 4.76 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{kgf} \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= 0.61, \quad b = 2.35, \quad c = 1.9 \\ R &= 0 \text{ (初期降伏において)} \end{aligned} \right\} (7)$$

ゆえに式(6)と(7)を用いると初期降伏時の式(4)と(5)の降伏関数が図1のように求められる。図1から加速履歴は遅延履歴に比べ、降伏応力が上昇していることがわかる。

4. 応力-ひずみ関係に及ぼす荷重速度の影響

Gurtin⁵⁾ によれば粘弾性体の挙動は、加速履歴と遅延履歴という2つの極限の履歴に対して弾性体の挙動のように表わされることが示された。粘弾/塑性体に対して、Naghdi⁷⁾ らは塑性ひずみ速度ベクトルの降伏曲面への直交性は一般的に成り立たないことを示した。しかしながら、加速及び遅延履歴に対して粘弾性体の性質は弾性体のそれに近づくので、直交条件を用いることができる。そこで Prager⁸⁾ によって与えられた次のような応力-ひずみ関係を用いることができる。

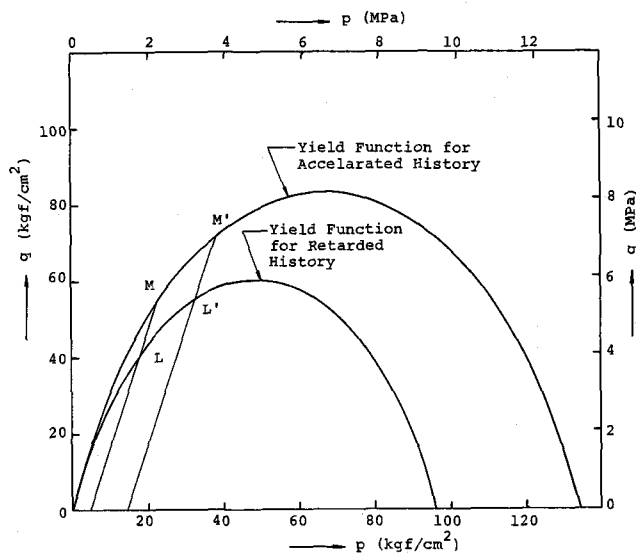


図1. 加速及び遅延履歴に対する降伏関数

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(p)} = \frac{1}{A} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} \quad (8)$$

ここに

$$A = - \left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{mn}^{(p)}} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_{mn}^{(p)}} \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \quad (9)$$

であり、 $\dot{\epsilon}_{ij}^{(p)}$ は塑性ひずみ速度、 σ_{ij} は応力、 κ は硬化パラメータである。

先に著者らは弾塑性体について次のような降伏関数を提案した。

$$f = I_2 + \alpha I_2^{1/2} + \beta I_1^2 + \gamma I_1 - \kappa = 0 \quad (10)$$

ここに I_2 は偏差応力の2次不変量、 I_1 は応力の1次不変量、 α, β, γ は材料定数であり、堆積軟岩に対して

$$\alpha = 54.6 \text{ kgf/cm}^2, \quad \beta = 0.149, \quad \gamma = 42.9 \text{ g/cm}^2 \quad (11)$$

である。硬化パラメータ κ については次式の速度形式を仮定した。

$$\dot{\kappa} = \phi_1 \sigma_{ii} \dot{\epsilon}_{jj}^{(p)} / 3 + \phi_2 \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{(p)} \quad (12)$$

ここに ϕ_1 と ϕ_2 は材料定数であり

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= -1.12 \times 10^4 \text{ kgf/cm}^2 \\ \phi_2 &= 3.73 \times 10^3 \text{ kgf/cm}^2 \end{aligned} \right\} (13)$$

である。軟岩の供試体が比較的ゆつくりした載荷条件において試験される時の状態を遅延履歴として仮定する。このときの降伏関数は式(5)あるいは式(10)によって与えられる。一方、加速履歴に対して降伏関数式(4)は三軸圧縮時に次のように表わされる。

$$F = \frac{q^2}{3} + \alpha' \left\{ \frac{1}{3} q \right\}^{1/2} + 9\beta' p^2 - 3\delta' p - K' = 0 \quad (14)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \alpha / \{J_1(0)\}^{1/2} \\ \beta' &= b J_2(0) / \{6 J_1(0)\} \\ \delta' &= c \{J_2(0)/6\}^{1/2} / J_1(0) \\ K' &= R / J_1(0) = K J_1(\infty) / J_1(0) \end{aligned} \right\} (15)$$

式(15)によって与えられる材料定数 α' , β' , δ' は式(6)と(7)を用いて表わされる。また硬化パラメータ K' は式(12)の K により表わされることになり、加速履歴に対する応力-塑性ひずみ関係は式(8)を用いると三軸圧縮状態において次のように書ける。

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}^{(p)} / \dot{\epsilon} &= (2/3 q + \alpha' / 3^{1/2}) \{ (2/3 + 2\beta') q \\ &+ \alpha' / 3^{1/2} + 6\beta' \sigma_1 - \delta' \} \{ J_1(0) / J_1(\infty) \} / \{ (2\beta' \phi_1 \\ &+ 2/3 \phi_2) q^2 + \{ 3\phi_1 (4\beta' \sigma_1 - \delta' / 3) + \alpha' \phi_2 / 3^{1/2} \} q \\ &+ 3\phi_1 \sigma_1 (6\beta' \sigma_1 - \delta') \} \end{aligned} \quad (16)$$

ここに $\alpha^{(p)}$ は偏差塑性ひずみである。図2において遅延履歴と加速履歴に対

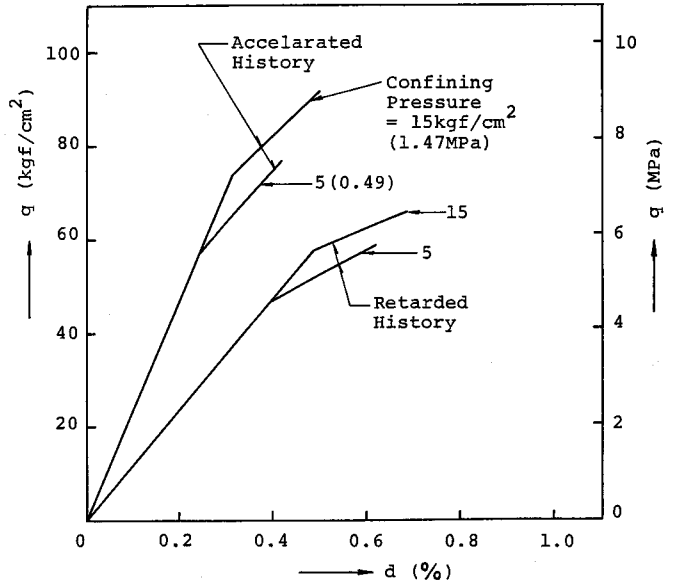


図2. 加速及び遅延履歴に対する応力-ひずみ関係

する応力 q と偏差ひずみ d の関係が示されている。図から加速履歴の方が遅延履歴より勾配が弾性域において、大きいことがわかった。降伏応力の上昇も認められる。また塑性域における勾配も加速履歴の方が大きいことがわかった。これらの結果は実験事実をよく表わしていると思われる。

5. クリープによる降伏

三軸圧縮試験において次のようなクリープ状態を考へよう。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{22} = \sigma_1 h(t) \\ \sigma_{33} &= \sigma_3 h(t) \end{aligned} \right\} (17)$$

ここに σ_1 , σ_3 は定数であり、 $h(t)$ は単位ステップ関数である。この場合、式(3)に式(17)を代入すると次式をうる。

$$\begin{aligned} f(t) &= U_{dist} + a U_{dist}^{1/2} + b U_{die} \\ &- c U_{die}^{1/2} - R = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

ここに

$$U_{dist} = \frac{\rho^2}{3} [2J_1(t) - J_1(2t) + \omega \{J_1(2t) - J_1(\omega)\}]$$

$$U_{dil} = \frac{3}{2} \rho^2 [2J_2(t) - J_2(2t) + \omega \{J_2(2t) - J_2(\omega)\}]$$

(19)

図3には式(18)を示してあり、時間 t の増加とともに降伏曲面が加速履歴に対する降伏曲面 $f(0)$ から縮小してゆく q がわかる。このことは軟岩が加速履歴に対する降伏応力以下の一定荷重を受けているとき、式(18)を満たすある瞬間に降伏が生じうること示しており、つまりクリープによって降伏がおさうすることを表わしている。

さて、式(5)を満たすような遅延履歴に対する降伏応力 p_r と q_r が、式(18)の $t \rightarrow \infty$ においてクリープ降伏を生じさせる応力 p_c と q_c にそれぞれ等しいと仮定する。これは図1の遅延履歴に対する降伏関数と図3における $f(\infty)$ が等しいことを仮定している。このとき式(5)と(4)より次式をうる。

$$\omega = 0 \quad (20)$$

このことは式(1)と(2)より保存エネルギーのみが降伏に関与することを表わしている。しかしながら、既往の実験事実などを考慮すると一般的には $\omega \neq 0$ であろうと考えられ、散逸エネルギーも降伏に関与しうらと思われる。

6. あとがき

エネルギー規準に基づく降伏関数を提案し、これを用いることにより軟岩の時間依存性の力学挙動を適切に表現しうること示した。また提案された降伏規準の意味についても力学特性と関連づけ検討を行なった。

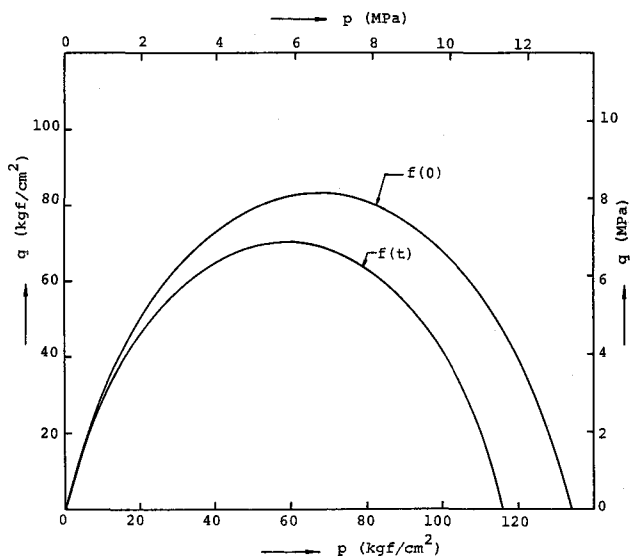


図3. 一定応力載荷時の時間に依存した降伏関数

参考文献

- 1) 平井, 佐武: 土木学会東北支部技術研究発表会講演概要, p.3, 1981.
- 2) 平井, 佐武, 柳沢: 土木学会年次学術講演会講演概要集3, p.262, 1981.
- 3) Christensen, R.M.: Theory of Viscoelasticity, Academic Press, 1971.
- 4) 平井, 佐武: 土木学会東北支部技術研究発表会講演概要, p.217, 1979.
平井, 佐武: 土木学会論文報告集, 第320号, 1982(4月).
- 5) Gurtin, M.E. and Herrera, I.: Quarterly Appl. Math., Vol. 23, p.235, 1965.
- 6) 赤井, 尾立, 西: 土木学会論文報告集, 第271号, p.83, 1978.
- 7) Naghdi, P.M., and Murch, S.A.: J. Appl. Mech., 30, p.321, 1963.
- 8) Prager, W.: J. Appl. Phys., 20, p.235, 1949.

Time-Dependent Stress-Strain Relationship of Soft Rocks

Hiroyoshi Hirai

Masao Satake

Eiji Yanagisawa

Faculty of Engineering

Tohoku University

Abstract

So far some criteria related to yielding of viscoelastic materials whose plastic behavior is independent of hydrostatic pressure have been proposed. Since the plastic behavior of viscoelastic materials such as soft rocks depends on hydrostatic pressure, the foregoing yield criteria are considered not to be sufficient to predict yielding. A yield criterion is proposed in order to elucidate phenomena associated yielding of soft rocks. By use of this yield criterion, the time-dependent behavior of soft rocks is investigated. The appropriateness of the yield criterion is examined through experimental data.

Followings are the results of this study.

- (1) For soft rocks, a yield criterion which consists of the stored energy and the dissipative one is proposed.
- (2) By use of the above criterion, the influence of loading rate on yield stress is investigated. It is shown that as the loading rate increases, the yield stress increases.
- (3) For the limiting cases that the loading condition is very slow or very fast, the stress-strain relationships of soft rocks are represented.
- (4) It is shown that yielding is caused by creep under the condition of constant stresses.
- (5) The appropriateness of the proposed criterion is studied through some characteristics of mechanical behavior of soft rocks.