

(3) 圧縮強度の確率モデルとそのパラメーターに関する実験と考察

日本大学工学部 〇田野 久貴
東北大学工学部 佐武 正雄

1. 緒言

一般に材料の圧縮強度は、体積の増加と共に減少するいわゆる寸法効果と、また、同一体積でもその細長比によって強度の異なることが知られている。この二つの現象はそれぞれ別個に扱われ、前者はいわゆる最弱リンクモデルにより一応の説明がなされ、後者についてはいくつかの実験式が報告されている。これらが別個に扱われるということは、このモデルのみでは一軸圧縮強度を充分説明しきれないことを示すものである。すなわち、内在する欠陥の数のみならず、その空間的分布をも考慮したモデルが必要である。このような観点から従来の意味での寸法効果と細長比を統一的に扱う若干広い意味での寸法効果のためのモデルを提案し、定性的には石膏を用いた実験と一致することをすでに報告した。本文では、先に未検討であったモデルにおけるいくつかの定数や本モデルが適用し得る限界寸法について検討するとともに確率モデルと寸法におけるパラメーターの相互関係についても考察を加えるものである。

2. 圧縮強度の確率モデル

今までに得られた結果を簡単に述べると次のようである。すなわち、体積 V を増加させる方法として(1)断面積 S を一定とし、その高さ h を増加させる (A シリーズ)、(2) h を一定とし S を増加させる (B シリーズ)、(3) 細長比を一定とし体積を増加させる (C シリーズ) の三つの場合について実験を行なった。

その結果、A シリーズでは体積の増加にもかかわらず強度は増加し、B 及び C シリーズでは共に強度は低下するが、B の方が低下率が大きい。これらのことから、石膏のように分離破壊を示す材料においては、その高さの増加は強度を増加させ、直径の増加は強度を減少させると考えられる。

そこでこの現象を説明するモデルとして、図-1 に示すようなモデルを用いた。このモデルでは、鎖の構成リンク数 r の増加はその破壊確率の増加を、また、鎖の並列数 k の増加はその減少をもたらすから、 r は材料の断面積と、 k はその高さに対応させたことになる。

破壊確率が 0.5 をとるときをもつて、このモデルの強度 (X) を表わすと次式が得られる。

$$X = \left\{ \frac{-\log \left(1 - \frac{1}{k} \right)}{\alpha r} \right\}^{\frac{1}{m}} \quad (1)$$

ここに α 及び m はワイブル分布 (後述(10)式) における定数、 k 及び r は確率モデルにおける鎖の本数及び鎖の構成リンク数である。

ここで、 k は材料の高さ h に、 r はその断面積 S にそれぞれ正比例する簡単な場合を考えると、任意の高さ h 及び断面積 S をもつ材料の強度は(1)式より次の(2)式で示される。

$$X = \left\{ \frac{-\log \left(1 - \frac{1}{A h} \right)}{\alpha B S} \right\}^{\frac{1}{m}} \quad (2)$$

$$k = A h, \quad r = B S \quad (3)$$

ここに、 A 及び B は比例定数である。

3. 確率モデルと材料の体積におけるパラメーターの相互関係²⁾

各パラメーター間に(3)式で示されるような簡単な関係が成り立つか否かを検討する前に、その相互関係を見てみよう。これら 4 個のパラメーター、 k 、 r 、 h 、 S は表-1 のような関係にあり、実験結果をも考慮するとこれらは互に直交した関係にあることがわかる。したがって、これらを図-2 に示すように平面 Ω 上の 4 本の座標軸として表わすことができる。これらによって形成される 4 つの平面のうち、 Ω_1 は材料の体積と Ω_3 は確率モデルの構成要素数にそれぞれ

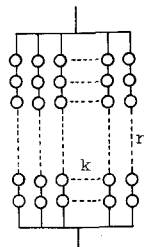


図-1

材料	構造	並列構造	直列構造
	パラメーター	S (断面積)	h (高さ)
確率モデル	モデル	直列	並列
	パラメーター	r (リンク数)	k (並列数)

(2) 表-1 材料および確率モデルのパラメーター

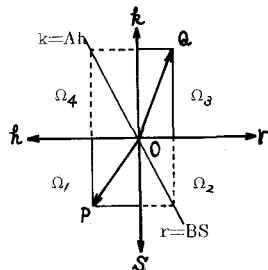


図-2 各パラメーターによる平面座標

対応している。この両平面上の点P及びQの関係は Ω_2 及び Ω_4 上の関係によって決定されるが、先の(3)式の仮定は図-2に示すような直線を仮定したことに等しい。

一方、これらのパラメーターと材料の強度(X)との関係は図-3のように示される。材料の高さhにより強度は増加し、その断面積は強度を減少させるという先の実験結果より、材料はXhS座標において図-3に示すような曲面 Σ をもつことがわかる。曲線 $X=f(h)$ 及び $X=f(S)$ はこの曲面 Σ のXh及びXS平面による切口であり、それぞれ増加及び減少の傾向を示す。したがって、これら両平面に平行な面による切口がA及びBシリーズの実験における強度を示す。また、X軸を含みh(S)軸と斜交する面によるものがCシリーズであり、Bに比べて強度の変化は小さいが減少の傾向を示す。この曲面 Σ の性質から考えて、材料の体積の変化によらず強度が一定となる場合もあると思われる。

4.実験による検討

4.1 Ω_2, Ω_4 平面上における各パラメーターの関係

次に、(3)式で仮定した材料の寸法(h, S)と確率モデルのパラメーター(k, r)との関係を具体的に求めてみよう。

図-4は、各シリーズの実験において破壊した供試体を、それぞれ中央横断面で切断することにより得られた平均的な破壊状況を示したものである。先に述べた強度の傾向と比較すると、これらの断面で観察される破壊個数Nと強度との関係は良く一致している。すなわち、Nの大きいほど強度は小さい。

図-5は、このNを直径dをパラメーターとし、高さhとの関係で示したものである。これにより次の実験式が得られる。

$$N = 2.2 \frac{d^2}{h} + 1 = 2.8 \frac{S}{h} + 1 \tag{4}$$

一方、図-6は切断面(図-4)に生じているき裂の総長さLと断面積Sとの関係であり、これより次式を得た。

$$L = 3.4 S h^{-\frac{2}{3}} \tag{5}$$

したがって、1個の供試体中の全破断面積L・hとして次式を得る。

$$L h = 3.4 S h^{-\frac{2}{3}} h = 3.4 S h^{\frac{1}{3}} \tag{6}$$

また、(5)式およびAシリーズの実験結果より、次の2つの式が成り立つと言えよう。すなわち

$$L \propto S \propto r, \quad h \propto k' \tag{7}$$

$$\therefore L h \propto k r$$

したがって、(6)式および(8)式の両辺を比較し、(3)式をも考慮すると次の関係が得られる。

$$k = A h^{\frac{1}{3}}, \quad r = B S \tag{8}$$

ここに、AおよびBは比例定数である。
すなわち、石膏を用いた本実験では、 Ω_4 および Ω_2 平面での関係はkの3式および

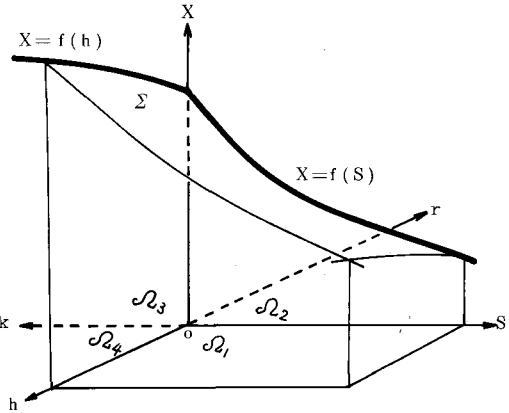


図-3 XhS座標と破壊曲面 Σ

d \ h	5 cm	7.5 cm	1.0 cm	1.5 cm	2.0 cm
5 cm					
7.5 cm					
1.0 cm					

図-4 細長比(h/d)による供試体断面の破壊状況の変化

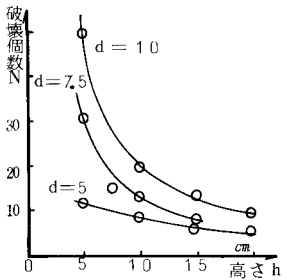


図-5 破壊個数Nと高さhおよび直径dとの関係

び r の 1 次式でそれぞれ示されることがわかる。

4.2 材料定数 α , m および比例定数 A , B の計算

(1) α および m : (1) 式を導びく際に材料内の欠陥と確率モデルの構成要素 (リンク) を対応させ、これらの欠陥のもつ強度 X の確率分布関数 $F(X)$ は、次式で示されるワイブル分布をもつと仮定している。

$$F(X) = 1 - \exp(-\alpha X^m) \quad (10)$$

石膏を用いた多くの実験より、その分布型はほぼワイブル分布をなすことが確められている。(10) 式の m は均一性係数と呼ばれるものであるが、本実験では $m=7.0$ を用いた。 α は m が得られれば、ある寸法の平均強度を用いて求めることができる (ワイブル確率紙を用いると同時に得られる)。

(2) A および B : 比例定数 A を求めるためには少なくとも 2 組の寸法の異なる実験が必要である。(2) 式に上で求めた α , m を用い、強度の比をとることにより断面積に関する項を消去して A を得る。

一方、定数 B は A のように強度比からは得られず、上述の 3 個の定数を求めた上で、具体的な実験値 (強度) を用いて求める必要がある。

以上の方法によって得られた各定数の値と、これらを算出するために用いた材料の実験寸法を表-2 に示す。

4.3 計算値と実験値の比較

表-2 の各定数を用いると、(2) 式によって任意の寸法をもつ材料の一軸圧縮強度を求めることができる。得られた計算値を図-7 に黒丸で示す。

一方、同図に実験値を白丸で示した。表-2 の A シリーズにおける 3 個のデータから得た定数を用いて、その他の寸法をもつ強度を推定した結果は、図-7 から明らかなようにその差は最大 9% 程度であり比較的良好に一致しているといえよう。

これらの実験値あるいは計算値を互に結んで得られる曲面が、第 3 節で述べた曲面 Σ である。これによって本実験に用いた石膏の一軸圧縮強度と寸法の関係を知ることができる。

5. 寸法効果における限界寸法

本文では、軸方向分離破壊を生じるような材料の圧縮強度を対象として議論を進めてきたが、ここに 2 つの問題点が考えられる。

すなわち、1 つは分離破壊に対する端面拘束の問題あり、他は確率モデルを適用し得る限界寸法の問題あり。

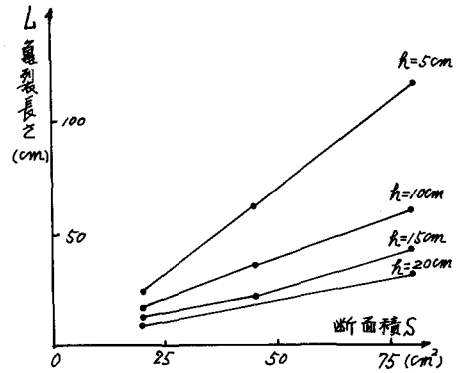


図-6 総き裂長 L と断面積 S の関係

定数	数 値	計算に用いた供試体寸法
m	7.0	$d=5\text{ cm}, h=10\text{ cm}$
α	2.94×10^{-6}	$d=5\text{ cm}, h=5\text{ cm}$
A	0.125	$d=5\text{ cm}$ $h=5\text{ cm}$ による 平均値 15 cm
B	2.94×10^{-3}	$d=5\text{ cm}, h=5\text{ cm}$

表-2 実験により得られた各定数

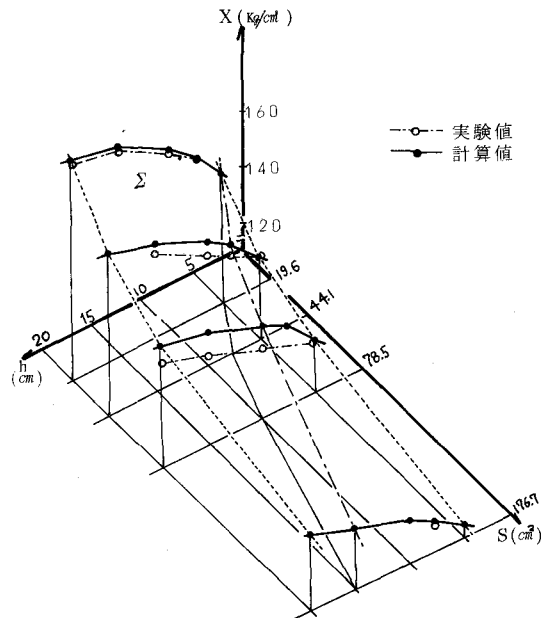


図-7 実験値と計算値による破壊曲面 Σ

題である。前者に関しては、端面の拘束を軽減した場合としない場合の比較実験を行ない、その結果をすでに報告しているが、その詳細な検討は改めて行なうこととし、本文では後者に関して検討を行なう。

破壊した供試体の断面を観察することにより、破壊個数 N とその寸法との関係が(4)式のように得られている。一方、分離破壊とは材料が少なくとも2つ以上に分割されることであるから、分離破壊を生じるような材料では次の(11)式を満足する必要がある。すなわち

$$N = 2.2 \frac{d^2}{h} + 1 \geq 2 \quad (11)$$

$$\therefore h \leq 2.2 d^2 \quad (12)$$

(12)式を図示すると図-8のようになる。

例えば、直径 $d = 1 \text{ cm}$ の場合は、高さ $h = 2.2 \text{ cm}$ 以下（細長比 $h/d = 2.2$ ）でなければ分離破壊が生じないことを示している。そして、直径とともにこの限界高さも急激に増大し、直径の絶対量が分離破壊に影響することがわかる。

すなわち、直径に比べてその高さがある程度大きくなると、供試体を完全に縦断するようない裂の発生確率が減少するためと解釈される。(12)式の関係は、図-8 分離破壊における限界寸法材料によってその具体的な数値は異なると考えられ、本文のような考察が適用し得るような材料においては、供試体の小さい場合にはその細長比に注意が必要である。なお、(12)式のみからは寸法効果の期待できる限界の最小直径は得られないので、別の面からの検討が必要である。

一方、最大寸法については、体積が増大しても材料が(10)式のような関係をもつならば、寸法効果は生じると考えられるが、直径がある程度の大きさをもち、かつその高さが相当大きい場合（(12)式により、直径が大きくなるとその許容される高さも急増する）の限界高さは、破壊様式の異なる座屈が生じるようになる高によって決定されると考えられる。

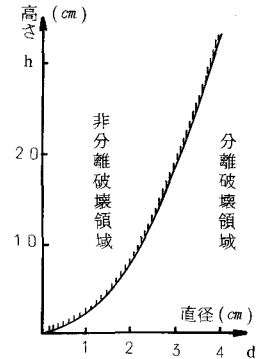
6. 総括

先の報告において、一軸圧縮強度を材料の断面積とその高さをパラメーターとする確率モデルにより考察したが、本文ではそこにおいて用いた4個のパラメーターの相互関係の検討や比例定数を求める方法を示し、表-2に示す値を得た。また、それらの値を用いて計算値を求め実験値との比較を行なったが、両者は比較的よく一致した。この結果、提案した簡単な確率モデルの妥当性がある程度認められたと思われる。

本モデルがその他の分離破壊を示すような材料、例えば岩石のような材料にも適用可能か否か、また、その際に定数をどのようにして求めるかなどは今後の課題である。

参考文献

- (1) 田野久貴、佐武正雄：脆性材料の寸法効果に関する実験と考察、土木学会第12回岩盤力学に関するシンポジウム講演概要、p.116~120, 1979.
- (2) 同上：圧縮強度の確率モデルとそのパラメーターに関する一考察、土木学会第34回年次学術講演会講演概要集、Ⅲ, p.341~342, 1979.
- (3) Weibull, W.: A Statistical Distribution Function of Wide Applicability, J. of Appl. Mech., 1951.
- (4) 真壁 肇：ワイブル確率紙の使い方、日本規格協会, 1966.



An Experimental Study on the probabilistic Model
of the compressive Strength of Brittle Materials

Nihon University Hisataka Tano

Tohoku University Masao Satake

It is well-known that the size effect of brittle materials is explained by the so-called weakest link theory. It is considered, however, that this theory is still insufficient to discuss the reason why the strength depends on the ratio of the length of specimen to its diameter.

In this paper, the probabilistic model for the compressive strength composed of many chains as is shown in Fig.(1) is proposed in order to take into account not only the size effect but also the ratio of length to diameter. It is assumed here that the number of these chains corresponds with the length of specimen and the number of links composed of a chain corresponds with the diameter. Such model makes possible to take into consideration the effect of the number and distribution of flaws in a specimen. The relations between the chain number k and the length h of a specimen and between the link number r and the area S of the cross-section are obtained from the observation of crack length in the cross-section of specimens under compression test.

The obtained equations are written as

$$r = A \cdot h^{\frac{1}{3}} \quad , \quad r = B \cdot S$$

where A and B are material constants listed in Table 2.

The estimated values of compressive strength from Eq.(2) show a good agreement with the experimental values as is shown in Fig.(7).