

1. 緒言

本報告は、脆性材料の一軸圧縮及び圧裂引張強度の寸法効果を検討するための簡単な確率モデルを提案し、実験によって検討を加えたものである。寸法効果に対する、いわゆる最弱リンクモデルによる説明は現象論的ではあるが、一つの有効な方法であると考えられる。一方、筆者らの二三の実験結果等^{2),3)}によると必ずしも同モデルでは説明し得ない点も見うけられた。また、相当大きな岩石によるBieniawskiの実験⁴⁾によれば、ある程度試験片が大きくなると圧縮強度は一定値に落着くという報告もあり、これらのことを考慮して次のような考察を行なっている。

2. 一般的考察

2.1 直列モデル (最弱リンクモデル)

内在するクラックの強度の確率分布としてWeibull分布を用いれば、周知のように、 n 個のクラックを含む材料の強度 X の確率密度関数 $g(X)$ は次式で与えられている。⁵⁾

$$g(X) = n m \alpha X^{m-1} \exp(-n \alpha X^m) \quad (1) \quad 3)$$

強度としてモード X_M を用いると(1)式より次式を得る。 m , α は材料定数, n はクラック数である。

$$X_M = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{m}} \left(\frac{1}{n \alpha}\right)^{\frac{1}{m}} \quad (2) \quad 5)$$

クラック数 n が体積 V に比例すると考えると、(2)式は(3)式のようにも表わされる。

$$X_M = N \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{m}} \left(\frac{1}{n \alpha}\right)^{\frac{1}{m}} \left(\frac{1}{V}\right)^{\frac{1}{m}} \quad (3) \quad N: \text{材料定数}$$

したがって、体積 V の増加にともなって強度は低下することになり、多くの実験の傾向と一致している。しかし、(3)式あるいは(2)式はクラック数のみを含み、その寸法や形状が考慮されていないという指摘もあり、また、細長比も考慮されていない。そこで本文ではこの細長比と寸法効果の関係について若干の考察を行なう。

2.2 直列・並列複合モデル

静的な確率モデルには、図-1に示すような直列及び並列の典型的な二つのタイプ(a), (b)がある。(1)式は(a)にもとづくものである。この両者は対照的であり、モデルの構成要素の増加は前者では強度の低下を、後者では強度の増加となる。静的確率モデルによる解析の多くは、この二つのモデルを適当に組合せることにより、モデル全体の確率密度関数を求めることに帰着する。しかし、一般に(1)式のような簡単な形式とならない場合が多い。

さて、体積 V が一定で細長比の異なる、例えば円柱供試体を考えてみよう。一軸圧縮試験のように軸方向に平行ないくつかの破面が生じる場合には、体積一定で細長比が増大するにしたがって、同一破面上にクラックが存在する確率が増加すると思われる。この現象はモデルにおいては並列要素の増加に対応する。一方、細長比の小さい場合には直列要素が増加すると考えられる。そこで、ここでは図-2に示すような直列及び並列システムを含む簡単なモデルを考える。すなわち、それぞれ r 個の要素よりなる直列モデルを k 個並列させたものである。

直列モデルの破壊確率分布関数 $G_r(X)$ は(1)式より得られるから、これを用いるとこの複合モデルの破壊確率 H_{kr} は次式で示される。

$$H_{kr}(X) = \{G_r(X)\}^k = \{1 - \exp(-r \alpha X^m)\}^k \quad (4)$$

強度として平均値($H_{kr} = 0.5$)で代表すると、強度 X は次式で示される。

$$X = \left\{ -\frac{\log\left(1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{k}}}\right)}{r \alpha} \right\}^{\frac{1}{m}} \quad (5) \quad 2)$$

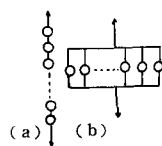


図-1

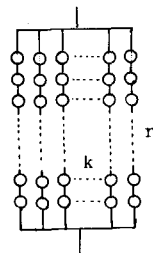


図-2 複合モデル

2.3 細長比と寸法効果

供試体の体積 V を増加させる方法に次の三つの場合を考える。A：直径 d を一定とし、高さ（長さ） h を変化させる。B：高さ h を一定とし直径 d を変化させる。C：細長比 R (h/d) を一定とし体積を増加させる。

ここで、並列（本）数 k 及び直列個数 r は、それぞれ高さ h 及び直径 d に比例すると仮定しその比例定数を A 、 B とすると、体積 V 及び細長比 R は次式で示される。

$$k = Ah, \quad r = Bd \quad A, B: \text{比例定数} \quad (6)$$

$$\therefore V = \frac{\pi d^2}{4} h = \frac{\pi k r^2}{4 AB^2}, \quad R = \frac{h}{d} = \frac{B}{A} \frac{k}{r} \quad (7)$$

A の場合：(5)式を直径 d (r) をパラメーターに、体積 V で示すと次式となる。

$$X_A = \left(\frac{1}{r \alpha} \right)^{\frac{1}{m}} \left\{ -\log \left(1 - 2^{-D_1 r^{\frac{2}{m}} \frac{1}{V}} \right) \right\}^{\frac{1}{m}} \quad (8)$$

B の場合：この場合は高さ h (k) をパラメーターとして(5)式を表わすと次式を得る。

$$X_B = \left\{ -\sqrt[D_1]{k} \log \left(1 - 2^{-\frac{1}{k}} \right) \right\}^{\frac{1}{m}} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{\frac{1}{m}} \left(\frac{1}{V} \right)^{\frac{1}{2m}} \quad (9)$$

C の場合：細長比 R がパラメーターとなり(8)、(9)式と同様に次式で示される。

$$X_C = \left[-\log \left\{ 1 - 2^{-\left(D_2 R^{-2} V^{-1} \right)^{\frac{1}{m}}} \right\} \right]^{\frac{1}{m}} \left(\frac{D_3 R}{\alpha} \right)^{\frac{1}{3m}} \left(\frac{1}{V} \right)^{\frac{1}{3m}} \quad (10)$$

ここに、係数 D_1 、 D_2 、 D_3 はそれぞれ次式で示される。

$$D_1 = \frac{\pi}{4 AB^2}, \quad D_2 = \frac{\pi}{4 A^3}, \quad D_3 = \frac{\pi}{4 B^3} \quad (11)$$

以上の(8)、(9)及び(10)式より次のようなことがいえよう。A の場合は、体積 V が増加すると強度はむしろ増加し、その程度は直径の小さいほど大きいと考えられる。

B の場合は体積が増加すると強度は低下するが、供試体の高さが小さいほどその低下率は大きい。

C の場合は、体積の増加による強度の増大と減少の項との積で表わされている。したがって細長比 R や材料にもよるが、一般に強度低下率は B の場合に比べて小さく、また、場合によっては強度低下のほとんどみられないこともあると思われる。さらに、細長比 R の小さいほど低下率は大きい。

これらをまとめると、(1)寸法効果は細長比によって異なる。(2)最弱リンクモデルによる(3)式は V^{-1} に比例し、(9)(10)式はそれぞれ $V^{-\frac{1}{2}}$ 、 $V^{-\frac{1}{3}}$ に比例することを比較すると、寸法効果は従来考えられているより小さいと考えられる。

8. 実験による検討及び考察

8.1 実験方法

寸法効果の実験については、すでに二三報告^{2), 3)}している。例えば、細長比 ($R=2$) の石コウ供試体の一軸圧縮強度の寸法効果について、その低下率は体積の 3 乗に逆比例することを報告しているが、これは(10)式の傾向と対応するものと考えられる。一方、これらは A あるいは C のみというように別個に行なわれた実験であるため、本文のような細長比による影響を検討するためには、必ずしも互の相関が良好ではない。そのため本実験では次のような点に留意した（なお、先の考察にしたがって一連の供試体をそれぞれ A シリーズ、B シリーズ及び C シリーズと称することにし、各供試体の直径及び高さの種類を一括して図-4 に示す。各シリーズはまた 3 種類よりなっている）。

(1)石コウ：水の重量比が一定 ($1:0.6$) かつ乾燥率が一定 ($25.5 \sim 26\%$) であっても、一回の練りまぜ量が異なると強度に影響を与えるため、1 バッチを一定量とした。(2)全種類の供試体を 1 バッチから製作するこ

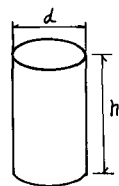


図-3

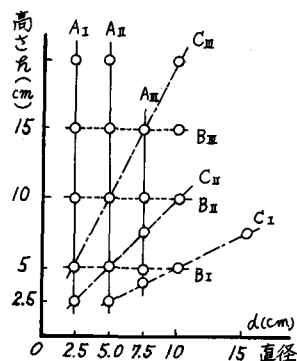


図-4 供試体の種類とシリーズ
(各点 約 20 個)

とは困難であるため、互に異なる供試体（種類）を組合せて1バッチの容量に等しくした。(3)石コウ一袋（25 kg）ごとの強度の差の影響を軽減するために、一袋で各供試体が同数となるように製作した。(4)圧縮試験は端面の摩擦による拘束を軽減するため、加圧面にグリースを塗布し薄いビニールシートをはさんで実験を行なった。また、これらを用いず拘束の影響を調べるための実験も平行して行なった。

3.2 圧縮試験結果

Aシリーズ（図-5）：体積Vの増加にともない強度の増大するもの（ $d = 5\text{ cm}$ ， 10 cm ）と部分的にのみその傾向のみられるもの（ $d = 2.5\text{ cm}$ ， 7.5 cm ）がある。前者の場合には、(8)式で示されるようにその増加率は直径の小さい方が大きいことがわかる。

Bシリーズ（図-6）：部分的に強度が増加しているものもあるが、全体的には寸法効果が現われている。その低下率は高さの小さいほど大きい傾向にあり、(9)式の傾向とよく一致している。

Cシリーズ（図-7）：(10)式から、このシリーズが最も強度の低下率が小さいと考えられるが、図-7の結果はこれを裏付けていると言えよう。また、細長比Rの大きいほど強度の低下率は小さいことがわかる。

3.3 圧裂引張試験結果

圧裂引張強度も、B，Cシリーズは圧縮の場合と同様な傾向にあることが図-9及び10から明らかであろう。しかし、Aシリーズでは体積Vの増加にともない強度が一定になる傾向があるものゝ、圧縮の場合のような明らかな強度の増加は見られない。

3.4 圧縮及び圧裂引張強度における寸法効果

の比較

B，Cシリーズにおいては圧縮及び圧裂ともに同様な傾向にある。一方、Aシリーズにおける両者には明らかな相異が見られ、圧裂引張の傾向は(8)式では説明できない。これらのことから、両者とも基本的には並列・直列複合モデルが適当と考えられるが、後者の場合には直列要素の影響を

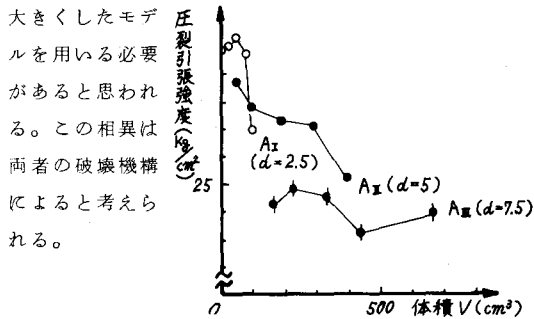


図-8 圧裂引張試験結果（Aシリーズ）

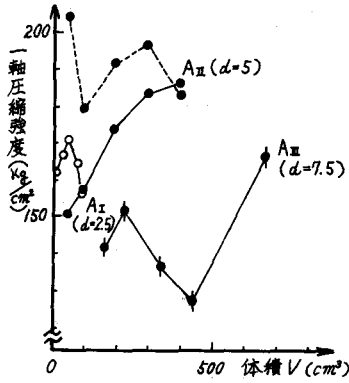


図-5 圧縮試験結果（Aシリーズ）

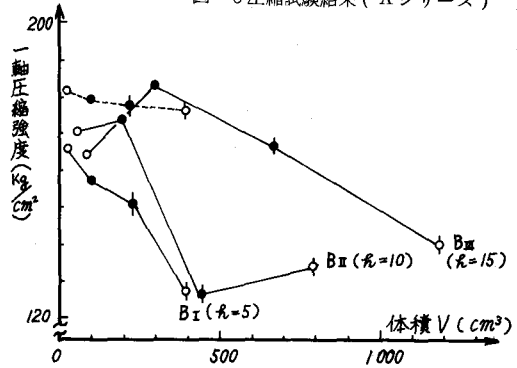


図-6 圧縮試験結果（Bシリーズ）

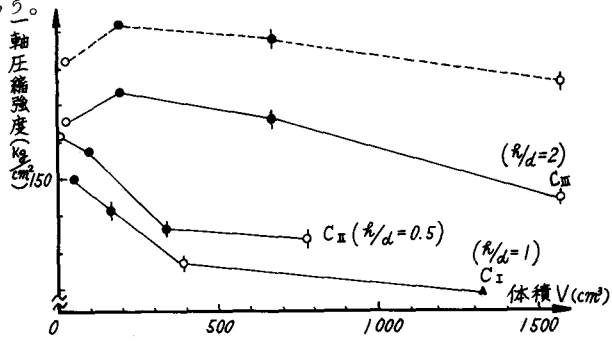


図-7 圧縮試験結果（Cシリーズ）

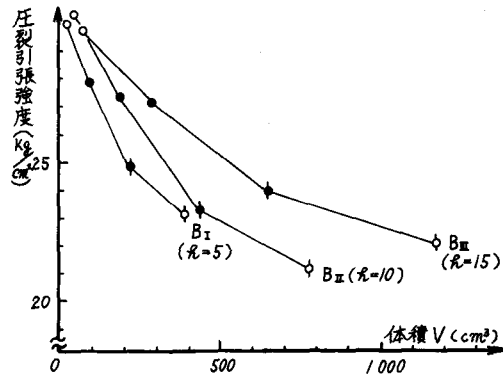


図-9 圧裂引張試験結果（Bシリーズ）

3.5 端面拘束の圧縮強度及びその寸法効果に及ぼす影響

端面拘束を軽減せずに行なった実験結果を、各シリーズのグラフ（図-5、6及び7）に破線で示した。B、Cシリーズでは明らかに端面拘束は寸法効果を減少させている。表-1に拘束の影響を軽減した圧縮強度（ X ）と拘束させた場合のそれ（ X' ）を示す。これによると、拘束させた場合の圧縮強度はほとんど増加している。

単なる強度の比較では無相関に見えるAシリーズの場合でも、表-1に示すようにその比（ X'/X ）をみると、高さ h の増加とともに拘束の影響が減少し、直径 d の約4倍付近ではほぼ同じ強度を与えることがわかる。また、この比をB、Cシリーズについてみると直径が大きく、高さの小さいほどその影響が大きい。表-2に、Cシリーズについてまとめて示す。（）内は周囲の実験値より推定した値である。これによると、通常よく用いられる細長比（ $R=h/d$ ）2.0では、本実験の場合端面拘束によって強度が10～20%大きく評価されている。

4.総括

従来の直列モデルのみでは、特に圧縮強度の寸法効果を充分説明できないことから、並列システムを加えた複合モデルを考えその適否を石コウを用いた実験によって検討したが、傾向としては圧縮及び圧裂引張強度とも比較的よい一致をみた。得られた結果をまとめると次のようである。(1)供試体の高さは確率モデルの並列数と対応し、高さの増加は寸法効果を減少させ、圧縮下では場合によって強度を増加させる。(2)寸法効果は細長比 R の影響をうけ、 R の小さいほど顕著である。(3)圧縮試験における端面拘束は寸法効果を弱める働きをする。これによる強度増加は細長比によって異なり、10～40%に及ぶ場合があり、供試体の断面積に比例し高さに逆比例する。

本文で用いた材料定数（A、B）の検討は今後の問題である。また、寸法効果の期待できる上限あるいは下限の寸法があるように思われ、特に寸法の小さい場合には注意が必要であろう。

参考文献

- 1) Peirce, F. T., J. Tex. Inst. 17, 355 (1926)
- 2) 田野, 服部 他, セイ性材料の寸法効果に関する実験とその考察, 土木学会東北支部技術研究発表会講演概要, 49 (1975)
- 3) 田野, 時高 他, 岩石の圧裂試験における寸法効果について, 同上, 51 (1975)
- 4) Bieniawski, Z. T., Int. J. of Rock Mechanics and Mining Science, 5, 325 (1968)
- 5) Weibull, W., Ing. Vetenskaps. Akad. Handl. 151, (1939)
- 6) 西松裕一, 岩石強度の確率論的考察, 材料, 17, 181, 896 (1968)

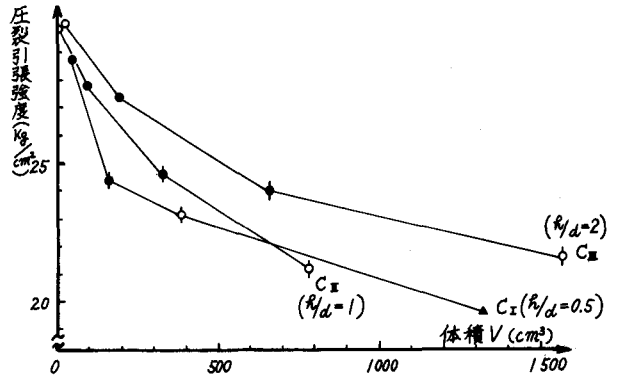


図-10 圧裂引張試験結果 (Cシリーズ)

シリーズ	高さ h 直径 d	圧縮強度 X ($\frac{kg}{cm^2}$)	強度比 X'/X	
AⅡ ($d=5cm$)	h (cm)			
	2.5	150	204	1.36
	5.0	157	180	1.15
	10.0	174	191	1.10
	15.0	184	197	1.07
	20.0	186	183	0.98
BⅠ ($h=5cm$)	d (cm)			
	2.5	166	182	1.10
	5.0	157	180	1.15
	7.5	152	178	1.17
	10.0	127	176	1.39
CⅢ ($h/d=2.0$)	h (cm)			
	5.0	166	182	1.10
	10.0	174	191	1.10
	15.0	167	188	1.13
	20.0	145	176	1.21

表-1 端面拘束を軽減した場合の強度（ X ）としない場合の強度（ X' ）との比較

R/d	0.5	1.0	2.0	3.0
d (cm)	強度比 X'/X			
2.5	1.34	(1.14)	1.10	(1.05)
5.0	1.36	1.15	1.10	1.07
7.5	(1.37)	1.17	1.13	(1.13)
10.0	1.39	(1.25)	1.21	(1.15)
15.0	(1.40)	(1.27)	(1.23)	(1.17)

表-2 細長比（ h/d ）と強度比 X'/X の関係

Experimental Studies on the Size Effect of Brittle Materials

Hisataka Tano, Nihon Univ.

Masao Satake, Tohoku Univ.

Abstract

This paper proposes to a statistical model of the size effects that is composed of parallel chains each other. It is assumed that the number of these chains are corresponded to the dimensions of the length of specimen, and also the number of links composed of single chain to its diameter.

If these assumptions hold, as the length increases the strength of specimen increases, that is, the strength increases as the volume increases depending on the ratio of diameter to length of specimen.

Based on these assumptions, the size effects of the uniaxial compressive and radial compressive strengths are given in the equations (8), (9) and (10).

In order to confirm these results, it was experimented that uniaxial and radial compression tests of cylindrical specimens by plaster changed of its size as follows;

Case A(Fig.5,8): The length(h) of specimen is variable without altering its diameter(d).

Case B(Fig.6,9): The diameter(d) is variable without altering its length(h).

Case C(Fig.7,10): The ratio of diameter to length is kept constant.

The experimental results which were obtained in the way described above are shown in Fig.6 - 10. These experimental results shows a similar tendency to this consideration.