

1. 緒言

本文は、脆性材料を不均一な力学的性質をもつ系と考え、この系のもつ強度について熱力学的な概念と関連させて考察したものである。この構造系の強度を論じるためには、ごく基本的なこと、例えば「破壊」と「強度」との対応関係を明らかにしておかなければならない。前者の定義としては、応力の存在のもとに材料が二つ以上に分離する現象と表現するのが一般的であると思われる。しかし、後者に関しては、破壊の過程において材料の示す最大耐荷力を、その初期の載荷面積で除した平均応力を強度としている。すなわち、破壊はその現象が終了した状態を示し、強度は破壊現象が急激に進行する時の応力を意味している。

2. 破壊におけるエントロピーの仮定と Griffith 理論との比較

クラックを含む材料の不安定平衡を論じた Griffith 理論¹⁾では、破壊に伴って消散するエネルギー S については考慮されていない。しかし、前述のように破壊過程の途中におけるある点が問題であり、従って消散エネルギー S についても考慮しなければならないと思われる。すなわち、 dF , dL , dU をそれぞれ自由エネルギー、外力仕事及び内部エネルギーの増分とし、先の S の増分 dS をも考慮して次式が成り立つと仮定する。

$$dF + dL + dU + dS = 0 \quad (1)$$

載荷状態としては、典型的な二つの試験状態を考慮しなければならない。すなわち、(i) 剛性試験の場合のように、ほぼ固定つかみと考えられるようなものゝ間で破壊する場合と、(ii) 通常の試験機を用いた場合である。

(i) においては外力は仕事をしないから $dL = 0$ である。従って (1) 式は次式となる。

$$dF - dU + dS = 0 \quad (2)$$

(ii) においては、 $dL = -2dU$ [※]であることが得られているから次式となる。

$$dF - 2dU + dU + dS = dF - dU + dS = 0$$

従って、どちらの場合においても、破壊に関するエネルギーについては同一の式となる。さて、(2) 式を次式のように書き換えると

$$dU = dF + dS \quad (2')$$

となり、エネルギー dU は保存量 (dF) と 非保存量 (dS) に変化することがわかる。ここで、 dF は表面に貯えられるいわゆる表面エネルギーと解釈されるが、(2) 式は熱力学におけるヘルムホルツの自由エネルギー (dF) とエントロピー (TdS) と同一型式となっている。

また (2) 式は次のようにも表わされ、前述の Griffith のエネルギー論と対比される。

$$dS = dU - dF \geq 0 \quad (3)$$

※ 硬い岩石等を圧縮した場合、通常用いられているような比較的剛性の低い試験機では、逐時破壊が進行してゆく過程において、外力は仕事をするとこでは考えている。しかし、厳密には荷重速度とクラック伝播速度との関係や破壊型式等によっても異なると考えられ、通常の試験機では (i) と (ii) の中間の条件となる場合もあると考えられる。

すなわち、 dS を消散エネルギーの増分（破壊におけるエントロピーの生成とここでは解釈する）であるから、(3) 式において等号のとき系が不安定平衡になるとする同理論は、熱力学的にも破壊開始の条件を論じていることになる。すなわち、破壊のエントロピー生成 (dS) ゼロの条件といえよう。

さて、破壊は内部エネルギーの解放増分 (dU) が表面エネルギーの増分 (dF) を越えることによって開始されると考えられるので (3) 式より $dS \geq 0$ となり、破壊のエントロピーは常に増大することになる。

一方、熱力学的エントロピーは変化の過程において常に増大し、系の安定な平衡状態では最大となり、そのとき系の状態はそれ以上変化しないとされている。従って、破壊の場合においても、その終了時には破壊のエントロピー (S) は最大となると考えられる。そして、我々はこの S の増大の過程において、エントロピーの増分 dS の最大の時の応力を「強度」としているものと考えられる。

3. 破壊におけるエントロピー (S) の概念と強度に関する考察

ここでは、本文で仮定したエントロピーの概念について、図一ノに示すような材料の破壊の簡単なモデルを用いて考察し、また、材料のどのような性質と関連しているかを考察する。

図一ノに示すように、材料が単位面積の断面をもつ N 本の柱状要素よりなると考える。一般の材料の一軸圧縮における破壊において、破壊開始応力と破壊終了応力に大きな差のあることが知られているが、これは、これらの要素の強度が図一2 (図一3) に示すような確率分布 (図では破壊までの時間 t で表わしている) をもつことを意味している。いま、これらの分布は時間 t の関数であるとする、図一3における $F(t)$ に要素の総数 N を乗じたものは、時間 t における要素の累積破壊数を示す。従って、荷重を $P = P(t)$ とすると、時間 t における非破壊要素の平均応力 (荷重に耐え得る実質部分の平均応力) σ_f は次式で示される。

$$\sigma_f = \frac{P(t)}{N - NF(t)} = \frac{P(t)/N}{1 - F(t)} = \frac{\sigma_a(t)}{1 - F(t)} \quad (4)$$

ここに、 N : 要素の総数、 F : 要素の強度の累積確率分布、 σ_a : 見掛けの外応力である。

さて、この σ_f が材料を構成する N 個の要素のうち、最強の要素の強度

: $\sigma_f = \sigma_2$ ($t = t_2$) になったときに実質的に破壊が終了すると考えられる。すなわち、

$$\sigma_f = \sigma_2 = \frac{\sigma_a(t)}{1 - F(t)} \quad (5)$$

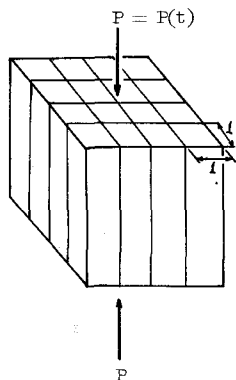
$$\therefore \sigma_2 (1 - F(t)) = \sigma_a(t)$$

これを満足する t は図一4における二つの関数の交点 C ($t = t^*$) で与えられる。ここに、

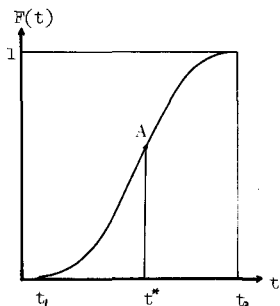
$$\sigma_a(t) = \sigma_2 (1 - F(t)) \quad (6)$$

である。従って、(6) 式は材料の耐荷力の低下を示す式であり、 $\sigma = \sigma_a(t)$ は負荷応力 (見掛けの平均応力) の増加を示すものである。

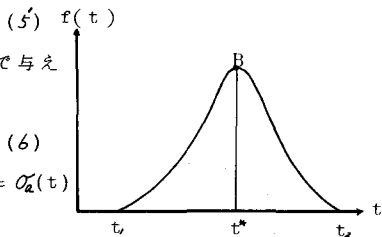
この t^* は分布 $F(t)$ の具体的な形が与えられなければ直接求められないが



図一ノ一軸圧縮における破壊のモデル



図一2要素の破壊時間 (強度) の確率分布



図一3要素の破壊時間の密度関数

別の観点から検討を行なってみよう。

緒言でも述べたように、我々は材料が最大の耐荷力を示すときの平均応力を強度としているが、具体的には、荷重計の指針が停止するときの平均応力を強度としている。これは、見掛け上荷重速度がゼロになるときの応力を強度とすることを意味する。従って、 $\dot{\sigma}_a$ 及び $\dot{\sigma}_s$ の応力速度の和は見掛け上 $t = t^*$ でゼロでなければならない。すなわち、

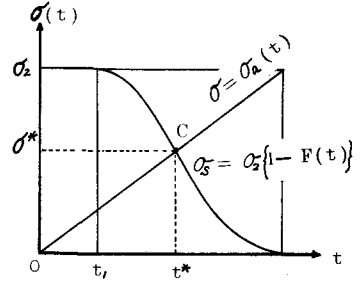


図-4

$$\dot{\sigma}_s = \sigma_s (1 - F(t))' = -\sigma_s F'(t) = -\sigma_s f(t) \quad (7)$$

$f(t)$: 要素の確率密度関数

$$\therefore \dot{\sigma}_a + \dot{\sigma}_s = \dot{\sigma}_a - \sigma_s f(t) = 0 \quad (8)$$

$$\therefore f(t) = \frac{\dot{\sigma}_a}{\sigma_s} \quad (9)$$

通常の試験では、荷重速度は一定と考えられるから

$$\dot{\sigma}_a = \frac{\sigma_a(t)}{t} \quad (10)$$

従って、 $t = t^*$ で $f'(t)$ は

$$f'(t) = \frac{\dot{\sigma}_a t^* - \sigma_a(t^*)}{\sigma_s t^{*2}} = 0 \quad (11)$$

となり、 $f(t)$ は $t = t^*$ で最大値となる。すなわち、図-4におけるC点 ($t = t^*$, $\sigma = \sigma_s$) は要素のもつ密度関数 $f(t)$ の最大値を示す点 (図-2: A点, 図-3: B点) と対応しており、最ひん値が系の強度 ($\sigma = \sigma_s$, $t = t^*$) となる。

ここで、 $t = t^*$ 附近における耐荷力低下曲線 $\dot{\sigma}_s$ の性質をみてみよう。(6)式の両辺を t で2回微分して低下加速度を求めると

$$\ddot{\sigma}_s = -\sigma_s f''(t) \quad (12)$$

を得る。 $f(t)$ が正規分布のような場合には $t = t^*$ の前後において

$$t \leq t^* \text{ のとき } \ddot{\sigma}_s \leq 0 \quad (13)$$

従って、最大応力に達する以前 ($t < t^*$) では、 $\ddot{\sigma}_s$ は負の加速度をもつことから系は安定であるが、破壊開始以後 ($t \leq t < t^*$) は、応力が増加すると $\ddot{\sigma}_s$ の絶対値は序々に減少するため、それだけ破壊は進行するから厳密には擬安定平衡であるといえる。 $t = t^*$ で系は不安定平衡となり、 $t > t^*$ で見掛け上の応力は一定であっても $\ddot{\sigma}_s > 0$ より破壊現象は加速され、系は不安定となる。

ここで、前節で仮定した破壊のエントロピー S との対応を考えてみよう。このエントロピー S も t のみの関数と考え、 $\dot{S}$ が最大するとき系は最大耐荷力を示す、すなわち、 $t = t^*$ のとき $\dot{S} = \max$ になることを述べた。一方、いままでに考察したように、構成要素のもつ確率密度関数 $f(t)$ を正規分布型と仮定すると、 $t = t^*$ のときに、系の耐荷力低下速度 $\dot{\sigma}_s$ もその絶対値が最大になることを示した。この $\dot{\sigma}_s$ は(7)式より明らかなように、密度関数 $f(t)$ で表わされるから、 $\dot{S}$ と $-\dot{\sigma}_s$ あるいは $f(t)$ とは対応しているように思われる。すなわち、

$$S \propto f(t)$$

とすると、

$$S = G\{F(t)\}$$

(14)

すなわち、材料を構成している要素の強度の確率分布 $F(t)$ は、破壊におけるエントロピー的な関数 (S) であると考えられる。

4. 実験結果による検討及びまとめ

本文で仮定した破壊のエントロピー S を直接検討できるような実験結果を筆者らは現在得ていないが、すでに報告された二、三の実験結果^{2), 3)}を引用して検討を試みる。

図-5²⁾は種々の岩石における破壊音、すなわち AE (Acoustic Emission) の荷重に伴う累積分布を示したものである。この AE は消散エネルギー、すなわち、本文で仮定した破壊のエントロピー S の一種と考えられる。図-5における、荷重が $0 \sim 100\%$ ($t = 0 \sim t^*$) の区間は、図-2の $t = 0 \sim t^*$ の区間に相当しており、この区間では $F(t)$ を正規分布型と仮定すると、 $F(t)$ は下に凸の曲線となるが、図-5の AE の分布も同様な傾向にある。このことは、本文における仮定、すなわち、材料の構成要素の強度の分布が正規分布的であること及び破壊のエントロピーは要素の強度の分布に類似であること等を裏付けるものと考えられる。図-5の場合、試験機の剛性が大であれば $\sigma = \sigma^*$ ($t = t^*$) 以後の荷重制御が可能となり、その AE の分布は図-2のようになり、また、エントロピー生成速度 $\dot{S}$ は要素の強度の密度関数 $f(t)$ と類似の形をとるものと思われる。図-6³⁾及び7³⁾は剛性試験機による結果であり、 AE の分布は密度関数、すなわち、ほぼ正規分布に類似している。また、強度も $f(t)$ の最大値付近の応力とみなせるが、図-7の例にみられるように、 AE のピークは最大応力以後に生じる傾向にあるといわれており、 $t = t^*$ とのずれについては検討の余地が残されている。

材料の一軸圧縮における破壊において、我々の得ている最大応力は、逐時破壊してゆく現象を見掛けの平均応力で表わすために生ずることを簡単なモデル (図-1) を用いて示した。この不均質な要素の集合である材料 (モデル) の破壊条件には、消散エネルギー、すなわち、破壊のエントロピーをも考慮する必要があること、また、この要素の強度の確率分布がエントロピー (S) 的な関数であり、従って、エントロピー生成速度 $\dot{S}$ が密度関数と対応し、その最ひん値を与えるとき ($t = t^*$) の応力が強度であることを示した。

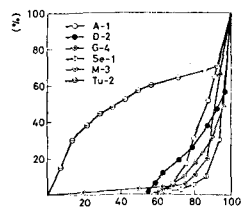


図-5 岩石における AE の累積分布

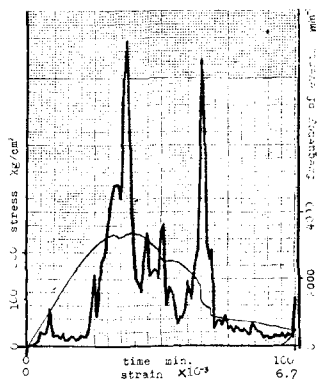


図-6 AE のひん度分布 (モルタル)

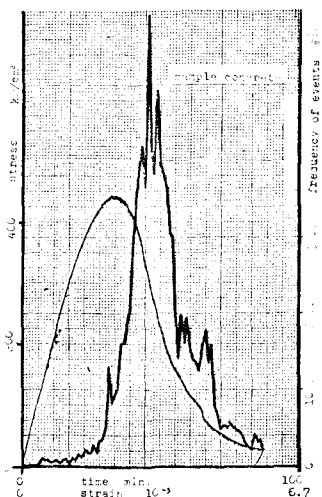


図-7 同上 (コンクリート)

1) Griffith, A.A.: The phenomena of rupture and flow in solids, Phil. Trans. Roy. Soc., A 221, 163 (1920)

2) 前 夫, 中尾健児: 岩石の一軸圧縮破壊過程における微震音の発生特性, 材料, Vol. 17, no. 181, 62 (1969)

3) 柳谷 俊, 佐野 修, 寺田 : 岩石内でのアコースティック エミッションの特性とその観測, 第9回岩盤力学に関するシンポジウム講演概要, 26 (1975)

Consideration on the Strength of Brittle Materials with Cracks

Hisataka Tano, Nihon University
Masao Satake, Tohoku University

Abstract

In this paper, the entropy with fracture of the brittle materials is discussed from the concept of thermodynamics and statistical property of brittle materials. In order to obtain the fracture condition of brittle materials composed from the many heterogeneous elements, it is necessary to consider the entropy with the phenomena of fracture. The strength of materials is to be determined when the rate of entropy production becomes to the maximum value.

It is derived that this rate is the function of $f(t)$ which is the probability density function of the elements of materials. It is seemed that $f(t)$ is concerned with the count rate of acoustic emission in brittle materials.