

1. 緒言

都市の過密化に伴い、土地が立体的に利用され、比較的浅いかぶりのトンネルが数多く開削されているが、トンネルが開削されることによって周辺地盤は多くの影響を受ける。地上においては構造物等が傾き、地中にはガス、水道、下水、電話等の埋設物の破壊などが挙げられる。最近では住宅地が山腹まで広がってきたことより、一層神経を使わなければならない現状である。これらトンネル周辺地盤の挙動に対して、いろいろな仮定に立脚した解法が挙げられるなかで、かぶりが浅いこと、沈下の時間依存性が大きいことなどを考慮して、粘弾性論の立場に立って解析し、若干の考察を行なった。解析に際しては複素関数論において、境界条件と Hilbert 問題へと移行して表わし、各境界に解析接続をすることより所要の解析関数を求めた。

2. 解法の概略

地表面近くにトンネルが開削される場合、トンネルが地表面に近づけば近づくほど、ずり取り出しによる重力減少の影響は大きくなってくる。よって、重力減少を考慮して、トンネルを開削しようとするところの初期応力を次の様に釣合表示しておく。

$$\sigma_r + i\tau_{r\theta} = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta) \quad (1)$$

トンネル開削による変位は、式(1)で与えられるトンネル壁面での垂直およびせん断応力と絶対値が同じで逆符号の応力をトンネル壁面 L_0 に作用させ、 $\alpha > L_1, L_2$ における次の境界条件を満足させた解析関数によって与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \text{on } L_1 \\ u = 0, \quad v = 0, \quad \text{on } L_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$-\sigma_r, -\tau_{r\theta}$ と L_0 に作用させた場合、 x, y 軸方向の合力は明らかに 0 となり、境界 L_0 のみを考慮した解析関数は

$$\varphi_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/z^n, \quad \psi_0'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n/z^n \quad (3)$$

となる。今、作用素 $\Gamma(\varphi, \chi)$ を次の様に定義する。

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(\varphi, \chi) &= \alpha \cdot \varphi(z) + \beta \cdot \bar{\chi}(\bar{z}), \\ \Gamma(\varphi_A + \varphi_B, \chi_A + \chi_B) &= \Gamma(\varphi_A, \chi_A) + \Gamma(\varphi_B, \chi_B), \quad \text{ここに, } \chi = \chi(z) = z \cdot \bar{\varphi}(\bar{z}) + \bar{\varphi}'(\bar{z}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(3)は境界 L_1, L_2 の条件を満足していないので、まず L_1 における境界条件を満足する解析関数を次の様に仮定する。

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z), \quad \chi(z) = \chi_0(z) + \chi_1(z) \quad (5)$$

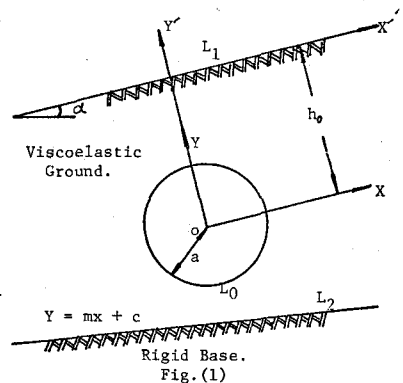
L_1 上の境界条件は式(2)より、次の様な Hilbert 問題へと移行して表わされる。

$$\Gamma(\varphi_0 + \varphi_1, \chi_0 + \chi_1) = 0, \quad (\alpha = 1, \beta = 1)$$

L_1 の境界が $\bar{z} = z - 2ih_0$ と複素表示されることより、未知関数 φ_1, χ_1 は既知関数によって次の様になる。

$$\varphi_1(z) = -\bar{\chi}_0(\bar{z}) = -\bar{\chi}_0(z - 2ih_0), \quad \chi_1(z) = -\bar{\varphi}_0(\bar{z}) = -\bar{\varphi}_0(z - 2ih_0) \quad (6)$$

同様に $\varphi_0(z), \chi_0'(z)$ と境界 L_2 の条件を満足するように解析接続し(この場合は変位拘束より, $\alpha = 3 - 4\nu, \beta = -1$), $\varphi_2(z), \chi_2'(z)$ を得る。ところで, $\varphi_1(z), \chi_1'(z)$ および $\varphi_0(z), \chi_0'(z)$ はそれぞれ L_0, L_2 および L_0, L_1 の境界条件を記すことになるので, それぞれの境界に同様に解析接続をする。これを収束するまでくり



なえし、結局、 L_0 , L_1 , および L_2 の境界条件を満足する解析関数は

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z), \quad \psi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi'_n(z) \quad (7)$$

となる。

今、地山が線形粘弾性体と仮定できれば、構成方程式は次の様な

Convolution integral の形で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}(t) &= \int_{-\infty}^t J_{ijkl}(z, t-\tau) \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \tau}(z, \tau) d\tau \\ \sigma_{ij}(t) &= \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(z, t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial \tau}(z, \tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここに J_{ijkl} , G_{ijkl} は i, j, k, l のクリープ関数テンソル, 緩和関数テンソルである。弾性材料と粘弾性材料との間の変位出現の相違は式(8)の構成方程式に出現しており、式(8)のラプラス変換が次式

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^*(s) &= S \cdot J_{ijkl}^*(s) \cdot \sigma_{kl}^*(s) \\ \sigma_{ij}^*(s) &= S \cdot G_{ijkl}^*(s) \cdot \epsilon_{kl}^*(s) \end{aligned}$$

の形で表わされることより L の対応原理を提案した。これはまず、弾性解を求め、それにラプラス変換を施し、その解の中に含まれる弾性定数を対応する粘弾性体の J のラプラス変換したものに代入し、最後にラプラス逆変換を行なえば、粘弾性問題に対する解を得ることができる。今、等方性粘弾性体において、せん断変形および体積変形を表わす式にラプラス変換を施したものは

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^*(s) &= S \cdot J_1^*(s) \cdot \sigma_{ij}^*(s) \\ \sigma_{kk}^*(s) &= S \cdot J_2^*(s) \cdot \sigma_{kk}^*(s) \end{aligned}$$

となる。すると、弾性定数のラプラス変換したものは $J_1^*(s)$,

$J_2^*(s)$ を用いて表わされ、変位と解析関数との間の関係式をラプラス変換することより次式を得る。

$$u^*(s) - iV^*(s) = J_1^*(s) \left[\left\{ 3 - 4 \frac{J_2^*(s) - J_2^*(s)}{2J_1^*(s) + J_2^*(s)} \right\} \varphi(z) - \{ \bar{z} \cdot \psi(z) + \psi'(z) \} \right] \quad (9)$$

よって、上式をラプラス逆変換することより変位は求まる。ところで、ポアソン比の時間的変化は一般に小さいことより、今これを一定と仮定すれば体積変形の経時変化はせん断変形に対するクリープ関数 $J_1(t)$ によって一意的に決定される。よって式(9)とこの仮定を求めれば次式を得る。

$$u(t) - iV(t) = J_1(t) \left[(3 - 4\nu) \varphi(z) - \{ \bar{z} \cdot \psi(z) + \psi'(z) \} \right] \quad (10)$$

たとえば、せん断応力とせん断変形との間の関係が、

Fig. (2) のような3要素モデルで近似できれば、

クリープ関数 $J_1(t)$ は次の様になる。

$$J_1(t) = \frac{1}{2} G + \frac{1}{2} G^* (1 - e^{-t/\tau})$$

ここに、retardation time τ は η/G^* である。

3. 解法の精度

地山が45°傾いている場合、音者の一人が双極座標

を用いてトンネル周辺の応力 σ_{ij} を求めているので、これと本解法との比較を行なったものが Fig. (3) である。解析関数は地表面とトンネル壁面とにそれぞれ一回解析接続を行なったもので $\varphi(z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z) + \varphi_2(z)$ 非常に収束が良いことがわかる。変位に対しては、セラチンを用いて模型実験を行ない、Fig. (4) に示すように大変良い一致をみた。トンネルが地表面に接近してくる場合、解析接続の回数とその収束性との調べた結果、

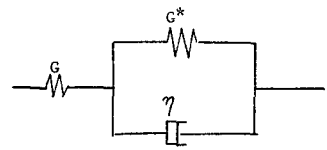


Fig. (2)

-----: Bipolar Solution.

-----: Present Approach.

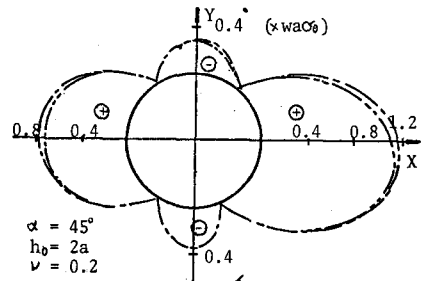


Fig. (3)

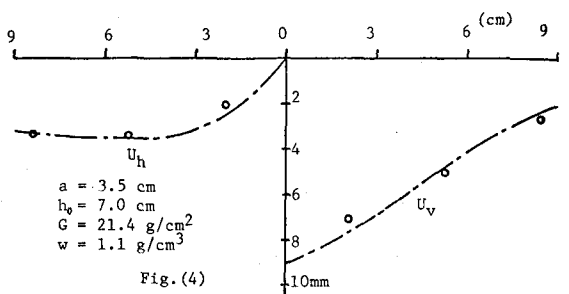


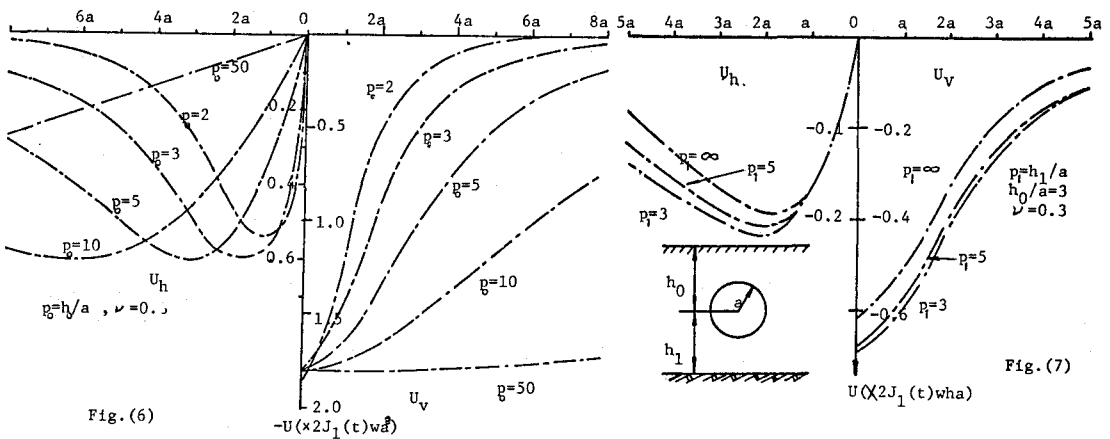
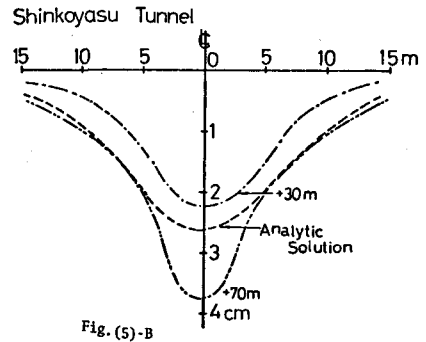
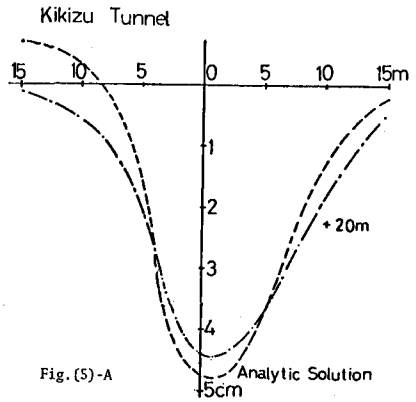
Fig. (4)

L_2 が存在しなく、 $h_0/a > 3$ の場合には地表面へ一回解析接続をすると全沈下量の90%以上が求まることがわかった。Fig.(5)は木々津トンネルおよび新子安トンネルにおける地表面の実測沈下量と解析値との比較を表わしたものである。

7. 解析結果とその考察

今回の解析で最も興味ある結果は Fig.(6)である。これは h_0/a の値による地表面変位の分布を表わしており、最大変位量は h_0/a の影響をほとんど受けないのに対し、沈下の分布は大変影響を受けることがわかる。初期応力が地表からの深さの一次関数であり、トンネル掘削が深いところにならばなるほど応力解放も大きくなることより、沈下の最大値はほぼ一定となる。しかし、沈下の領域は広い範囲にあふ。一方、トンネルの土がぶりが浅くなるにつれて、沈下曲線の勾配は大きくなる。沈下による被害の多くは不等沈下起因することから、トンネル土がぶりが浅くなる程二点間の相対変位は大きくなり、危険な状態となる。たとえば、半径4mのトンネルを開削する場合、トンネル中心上とところと、トンネル横断面上において中心から6m離れたところとでは $h_0=8m$ で約6cm、 $h_0=20m$ で約2cmの垂直相対変位が生ずることとなり(こゝに、せん断弾性係数 $G=500 \text{ kg/cm}^2$, $\nu=0.3$, 単位体積重量 $\gamma=1.5 \text{ g/cm}^3$, 基礎岩盤は存在しないものとする。), 土がぶりが浅くなると加速的に相対変位が増加することがわかる。

Fig.(7)はトンネルの下方に剛とみなせる岩盤が存在する場合、それのトンネルへの接近距離による地表変位の影響を調べたものである。岩盤がトンネルに近づくにつれて、 U_v (垂直変位), U_h (水平変位)ともにその出現が大きくなる。これは一見して矛盾しているようであるが、もし岩盤が存在しなければ、仮想 L_2 上の点はトンネル掘削によって上部空間に浮き



上より（詳細にはトンネル方向に変位が出る）、岩盤が存在すればその移動量だけ下方に引きもどすこととなり、地表においては変位は多く出現することとなる。

Fig. (8) は地山の傾きの影響を調べたものである。傾きの増大とともに変位の絶対量は増大し、傾きが約30°以下であれば最大沈下の点はほぼトンネルの真上に存在することがわかる。また、沈下曲線の最大値を示す位置よりすぐ谷側のところでは、沈下曲線の勾配が非常に大きいことから、この近辺に相対変位が大きく出現することとなる。

Fig. (9) はポアソン比の影響を調べたものであるが、ポアソン比の小さい程不等沈下の様相を示してくる。たとえばポアソン比の最大、最小値に対する最大沈下量およびトンネル中心上の沈下曲線の勾配は、いずれも約4倍程の相違が生じてくる($\nu/a=3$ の時)。Fig. (10) は地中変位を表わしたものである。トンネルのすぐ近くでは垂直沈下は大きく影響を受けるので埋設物の破壊には十分注意を払う必要があろう。

5. 参考文献

A) Muskhelishvili, N.I.: Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, Holland, (1963)

B) 森口繁一：2次元弾性論，岩波講座，現代応用数学，1957。

C) Lee, E.H.: Stress Analysis in Viscoelastic Bodies, Quart. Appl. Math., Vol. 13, No. 2, pp183~190, 1955.

D) 伊藤富雄：傾斜面下に掘ったトンネルの周辺応力について，土木学会誌Vol. 36-2。

E) 伊藤富雄，久武勝保：地表面近くに開削したトンネルによる周辺地盤の応力及び変位の鏡像原理による解析，土木学会第29回年次学術講演会，第3部，pp 428~429。

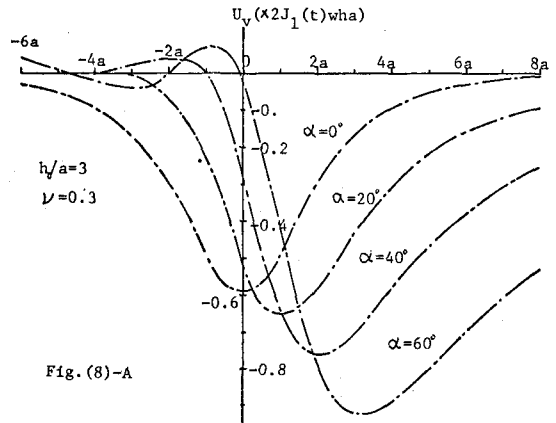


Fig. (8)-A

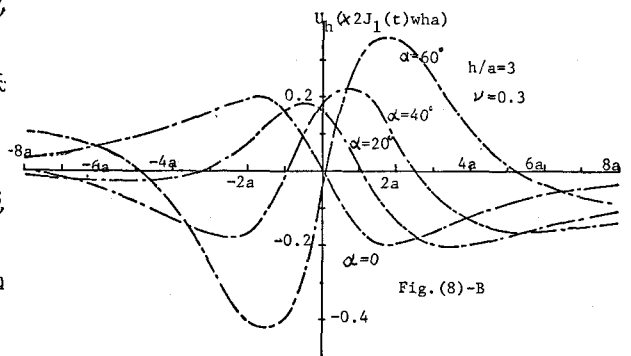


Fig. (8)-B

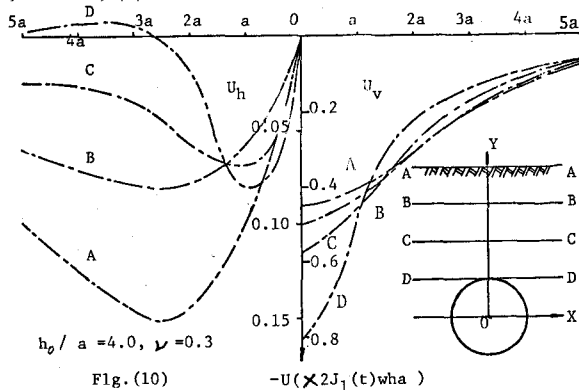


Fig. (10)

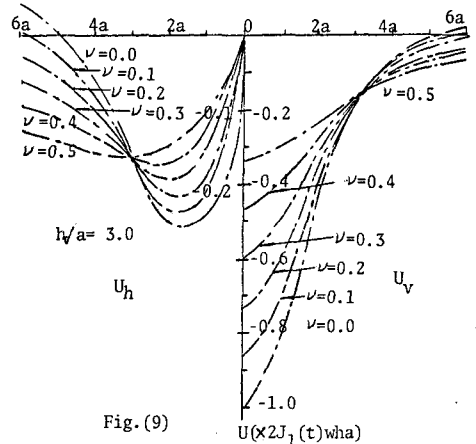


Fig. (9)

Tomio Ito **

Masayasu Hisatake **

The present paper describes a analytic solution and some numerical examples concerned with the ground deformations created by a tunnel excavation. A complex variable approach is used under the assumption that the ground is a isotropic, homogeneous and viscoelastic material.

Initial stresses $\sigma_r^0, \tau_{r\theta}^0$ on the contour of the hole are written as a following series expansion.

$$\sigma_r^0 + i\tau_{r\theta}^0 = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cdot \cos n\theta + D_n \cdot \sin n\theta) \quad \text{-----(1)}$$

The weight of the ground mass which will be removed with the excavation of the tunnel must be considered in the above equation. When external loads equal magnitude and opposit sign of the stresses in the above equation are applied on the contour of the tunnel, analytic functions $\varphi_0(z), \psi_0'(z)$ become following forms.

$$\varphi_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n / z^n, \quad \psi_0'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n / z^n. \quad \text{-----(2)}$$

Now, $\Gamma(\varphi, \chi)$ may be defined as follows.

$$\Gamma(\varphi, \chi) = \alpha \cdot \varphi(z) + \beta \bar{\chi}(\bar{z}), \quad \Gamma(\varphi_A + \varphi_B, \chi_A + \chi_B) = \Gamma(\varphi_A, \chi_A) + \Gamma(\varphi_B, \chi_B) \quad \text{-----(3)}$$

where $\chi = \chi(z) = z \cdot \bar{\varphi}(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z})$.

Eq.(2) doesn't satisfy boundary conditions at L_1, L_2 , so firstly one puts analytic functions, which will satisfy the boundary condition $\sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$ at L_1 , as following forms. $\varphi(z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z), \quad \chi(z) = \chi_0(z) + \chi_1(z)$. -----(4)

The boundary condition at L_1 can be written as a form of Hilbert problem, and unknown functions $\varphi_1(z)$ and $\chi_1(z)$ are expressed by the given function $\varphi_0(z)$ and $\chi_0(z)$.

$$\varphi_1(z) = -\bar{\chi}_0(\bar{z}) = -\bar{\chi}_0(z-2ih_0), \quad \chi_1(z) = -\bar{\varphi}_0(\bar{z}) = -\bar{\varphi}_0(z-2ih_0), \quad (\alpha = 1, \beta = 1) \quad \text{-----(5)}$$

Secondly one can get analytic functions $\varphi_2(z), \chi_2(z)$ that satisfy the boundary condition at L_2 ($U_h = 0, U_v = 0$) in the same manner. But $\varphi_1(z), \chi_1(z)$ and $\varphi_2(z), \chi_2(z)$ disturb the boundary conditions at L_0, L_2 and L_0, L_1 respectively, so the above functions must be connected with the respective boundary. By repeating this connections over and again, one can get following analytic functions which satisfy the all boundary conditions.

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z), \quad \chi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(z). \quad \text{-----(6)}$$

According to the principle of correspondance between a elastic body and a visco-elastic one, inversion of the Laplace transform of Eq.(7) gives the desired displacements for the viscoelastic ground.

$$U_x^*(s) - iU_y^*(s) = J_1^*(s) \left\{ \left[3-4 \frac{J_1^*(s) - J_2^*(s)}{2J_1^*(s) + J_2^*(s)} \right] \bar{\varphi}(\bar{z}) - [\bar{z} \cdot \varphi(z) + \psi'(z)] \right\}. \quad \text{-----(7)}$$

** : Dep. of Civil Engineering of Osaka University.