岩盤の粘弾性定数とその評価に関する考察

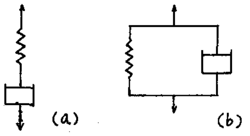
秋田大学　(正)　赤木知之

1. 緒　言

岩盤の変形に関し、その時間依存性を考慮するには線形粘弾性理論を適用するのがもっとも便利で、広範な理論展開が可能となる。線形粘弾性材料に対する応力ひずみ関係は、Boltzmann が一般化しており、重ね合わせの原理および因果律のみを条件として、次式のように与えられる。

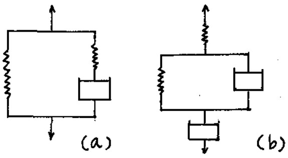
$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} J(t-\tau)\frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}\,d\tau \quad \text{----------- (1)}$$

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} E(t-\tau)\frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau}\,d\tau \quad \text{----------- (2)}$$



図－1

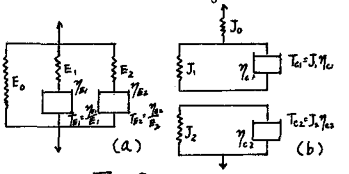
$J(t)$, $E(t)$ はそれぞれ材料の特性関数で、クリープ関数，緩和関数と呼ばれる。しかし、実際の構造解析には、これらの特性関数を陽に表示しなければならない。Voigt，Maxwell 等によるバネとダッシュポットの組合わせからなる力学モデル（図－1）は、この特性関数を直感的に捕えた最も簡単な表示法で、図－1（a）はMaxwell モデルと呼ばれ、材料の応力緩和現象を説明するのに用いられる。（b）はVoigtモデルと呼ばれ、クリープ現象をよく説明する。したがって、これらのモデルは粘弾性挙動をあらわす基本要素として、古来、たびたび用いられている。しかし、それぞれ単独のモデルだけでは実際の材料挙動の一半しか説明することができない。実際の粘弾性体の挙動、つまり、応力緩和，クリープ，瞬間応答，残留変形等を共に説明できるようにするためには、更に複雑なモデルが要求される。そこで考えられたのが図－4 に示す一般化 Voigt モデルおよび一般化 Maxwellモデルである。この一般化モデルの概念は、Maxwell要素，Voigt要素が有する単独の緩和機構および遅延機構を共にもたせ、更にその機構の数を材料に応じて任意に考えようとするものである。したがって、さらに一般化をすすめて、これらの機構を無限に多く連続して存在すると考えれば、緩和スペクトル，遅延スペクトルなる概念を導入し、このスペクトルを捕えることのみによって材料の粘弾性的挙動をすべてあきらかにすることができる。



図－2

しかし、材料そのものの研究より、その材料挙動を構造解析に適用しようとする場合は、巾広い時間範囲に連続して存在するこれらの機構を適当に離散化し、数個の代表的要素であらわしても、実際の挙動と大きく異なることはなく、この方が実際の解析手順を容易にしてくれる。

このような観点から、従来ひろく用いられているのが、図－2 に示すZener モデル（a）、Bürgerモデル（b）である。これらは、ある有限の遅延機構および緩和機構と無限大の遅延機構だけで、すべての材料挙動を代表させようとしたものである。しかし、モデル定数の評価に関する煩雑ささえ解決できれば、遅延機構、緩和機構をあらわす要素の数を増した方が、実際の材料挙動により忠実であることは確かである。また、Bürgerモデルにおけるひとつの遅延機構を無限大と限定してしまうよりは、任意性を持たせ、図－3(b)に示すモデルに統一し、場合によって大きな遅延機構を与えた方が、より一般性のある材料評価ができそうである。



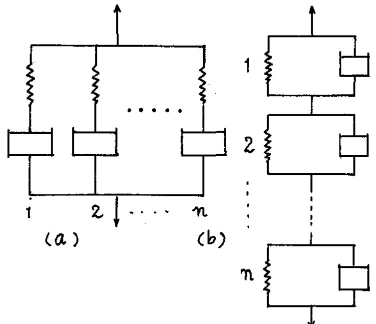
図－3

本報告はこれらの考察を基として、粘弾性材料の特性関数である緩和関数，クリープ関数をクリープ試験から単純に定めうる手法について述べている。

2. 一般化Maxwellモデルと一般化Voigtモデルの等価性

Boltzmannの記憶積分で定義される応力ひずみ関係式(1), (2)は、それぞれ応力，ひずみを逆に未知関数と考えることにより、Volterra型の積分方程式とみなすことができる。この方程式は合成関数に関するラプラス変換の定理を応用して簡単に解け、一意の解が存在することがわかっている。この解の存在により、クリープ関数J(t)と緩和関数E(t)の相互関係があきらかとなり、次式が得られる。

$$\bar{J}(s)\cdot\bar{E}(s) = 1/s^2 \quad \text{---------(3)}$$



図−4. 一般化モデル

ただし、関数の上のバーはラプラス変換を意味し、sは変換パラメーターである。
この関係式は、式(1), (2) にあらわれる特性関数の一般形式にある制限を与えることになる。一方、図−4 の一般化モデルから導びかれる応力ひずみ関係は、次式のような線形微分方程式であらわされるので、重ね合わせの条件を充たしており

$$P(D)\,\sigma(t) = Q(D)\,\varepsilon(t) \quad , \text{但し } P(D)=\sum_{k=1}^{r} a_k D^k ,\quad Q(D)=\sum_{k=1}^{p} b_k D^k ,\ D=\frac{d}{dt} \quad \text{....(4)}$$

式(1), (2) は重ね合わせの原理のみによって形式化されたものであるから、式(4) から得られるクリープ関数，緩和関数も式(3) を満足するものと考えることができる。式(8) にラプラス変換をほどこすと、変換パラメーターSに関する代数方程式が得られ、式(3) を満足させるには、ある初期条件のもとに式(4) の両辺の階数が等しいこと、つまり(5)式の成立が必要条件となり、式(6) が成立する。

$$r = p \quad \text{-------------------------(5)}$$

$$S\,\bar{E}(S) = \bar{Q}(S)/\bar{P}(S) \quad , \quad S\,\bar{J}(S) = \bar{P}(S)/\bar{Q}(S) \quad \text{-------------(6)}$$

形式的には一般化Voigtモデルからクリープ関数が、一般化Maxwellモデルから緩和関数が、簡単な形で導びかれるが、式(5) を考慮したモデルを導入すれば、式(6) を任意に対応づけることができる。つまり、これらのモデルに幾分の修正をほどこせば、等価な一般化Voigtモデルと一般化Maxwellモデルが形式化される。
たとえば、n個のMaxwell要素からなるモデル(図−4−a)と、n+1個のVoigt要素モデルの2つの遅延機構を零および無限大としたものは、r=P=nとなって等価である。さらに、n+1個のMaxwell要素モデルの1つの緩和機構を無限大としたものと、n+1個のVoigt要素モデルの1つの遅延機構を零としたものもまたr=P=nで等価である。結局、この種の力学モデルには、任意のnに対して4つの形式が存在し、そのうちの2組は等価となるので、2種類の材料を規定し、前者を流体的モデルとすれば、後者は固体的モデルということができる。しかし、前節でも述べたように、無限大と限定した遅延機構に任意性をもたせ、無限大を特別な場合とすれば、流体モデルを固体モデルに含めて考えた方がより一般的で、いままで繁雑に過ぎた粘弾性モデルを1つに統一することができる。図−3はこのn=2の場合に相当する。

3. 粘弾性モデル定数

線形粘弾性体の材料特性を表示するパラメーターとしては、瞬間応答，最終応答，緩和あるいは遅延の程度をあらわすものが、目安となる。
いま、図−3の一般的モデルに関し、r=P=nとして式(4) を解くと、クリープ関数，緩和関数は次式で与えら

れる。
$$J(t) = J_0 + \sum_{i=1}^{n} J_i \left(1 - e^{-t/T_{ci}}\right) \quad \text{------ (7)}$$
$$E(t) = E_0 + \sum_{i=1}^{n} E_i\, e^{-t/T_{ri}} \quad \text{------ (8)}$$

ここに、T_{ci}, T_{ri} が遅延および緩和の程度をあらわすもので遅延時間,緩和時間と呼ばれる。瞬间応答をあらわす定数は、J_0 および $E_0 + \sum_i E_i$ で、最終応答は $J_0 + \sum_i J_i$ でよび E_0 であらわされる。これらの定数は式 (3) の規制を受けるので、互いに独立には定められない。$n = 2$, つまり図−3 のモデルに対するこれら定数間の関係は、次のように与えられる。

$$\left.\begin{array}{l} E_0 = \dfrac{1}{J_0 + J_1 + J_2}, \quad E_1 = \dfrac{(1/T_{c1} - \mu_1)(1/T_{c2} - \mu_1)}{J_0\, \mu_1 (\mu_1 - \mu_2)}, \quad E_2 = \dfrac{(1/T_{c1} - \mu_2)(1/T_{c2} - \mu_2)}{J_0\, \mu_2 (\mu_2 - \mu_1)} \\ T_{r1} = \dfrac{1}{\mu_1}, \quad T_{r2} = \dfrac{1}{\mu_2}, \quad \left.\begin{array}{l}\mu_1 \\ \mu_2\end{array}\right\} = \dfrac{1}{2} \left\{ \dfrac{1}{J_0}\left(\dfrac{J_0+J_1}{T_{c1}} + \dfrac{J_0+J_2}{T_{c2}}\right) \pm \sqrt{\dfrac{1}{J_0^2}\left(\dfrac{J_0+J_1}{T_{c1}} + \dfrac{J_0+J_2}{T_{c2}}\right)^2 - 4\,\dfrac{J_0+J_1+J_2}{J_0\, T_{c1}\, T_{c2}}} \right\} \end{array}\right\} \text{---- (9)}$$

さらに、最終応答に関する係数と瞬间応答の係数の比をとれば、次式のような関係が得られる。

$$\frac{J_0}{J_0 + J_1 + J_2} = \frac{E_0}{E_0 + E_1 + E_2} = \frac{T_{r1} \cdot T_{r2}}{T_{c1} \cdot T_{c2}} \quad \text{------ (10)}$$

結局、実験からクリープ関数を定め、以上の諸式から緩和関数を定めることができるのである。

4. 遅延スペクトルによるクリープ関数の評価

クリープ試験からクリープ関数式(7) を定めようとする場合、n の決め方に統一的手法が無く、最初からある値を仮定しているのが現状である。しかし、ここで材料の遅延スペクトルを求めておくと、これらの決定に意味のある解釈を与えることができる。
いま、式(7) の離散化した遅延時间を連続に分布したものと考えれば、クリープ関数は次式であらわされる。

$$J(t) = \int_0^{\infty} \Phi(T_c)\left(1 - e^{-t/T_c}\right) d(\ln T_c) \quad \text{------ (11)}$$

この $\Phi(T_c)$ を遅延スペクトルと呼ぶ。$\Phi(T_c)$ について解くと、漸近式として次式が得られる。

$$\Phi(T_c) = \lim_{k \to \infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k-1)!} (kT_c)^k \frac{d^k J(kT_c)}{dT_c^{\,k}} \quad \text{------ (12)}$$

これは、$k = 1, 2, 3, \cdots$ と増してゆくにつれ近似度の高まる式である。しかし、実験的に得られる $J(t)$ の値を微分することによって誤差が大きくなるので、むやみに k を大きくしても無意味である。$k = 1$ および 2 の場合について、式(12) は次式となる。

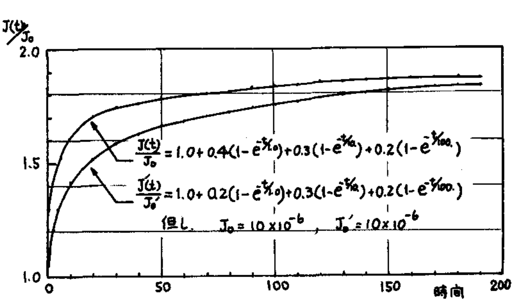
$$\Phi_1(t) = t\,\frac{dJ(t)}{dt} \quad \text{------ (13)}$$

$$\Phi_2\left(\frac{t}{2}\right) = -t\,\frac{d^2J(t)}{dt^2} \quad \text{------ (14)}$$

材料学的な研究の場合は、巾広い時间範囲の挙動を知るためにクリープ曲線を対数時间であらわす。その場合は

$$\Phi_1(\log_{10} t) = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{dJ}{\log_{10} t} \quad \text{------ (15)}$$

となる。



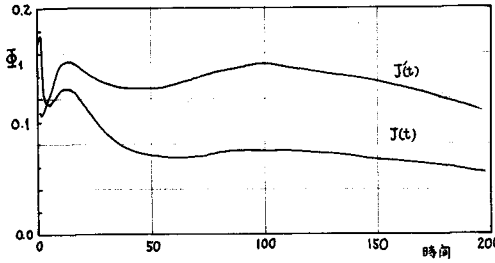
図−5 クリープ曲線

例として、図−5 に示すクリープ曲線の遅延スペクトルを、オ1近似(式−13), オ2近似(式−14)について

描いたのが、それぞれ図－6，図－7である。図－5のクリープ曲線には、あらかじめ3つの離散的な遅延時間を与えてあったので、そのピークが近似の度合を高めるにつれて、強く現われているのがわかる。また、そのスペクトル値は、遅延時間が他に比べて十分に大きいもの（T=100）について、その時間のコンプライアンスの½と評価することができ、さらに他に比べて十分に小さい遅延時間（T=1）のコンプライアンスは、瞬間応答に含めて考えることができる。従って、スペクトル分布からのクリープ関数の評価は次のようになる。

$$J(t)=\left\{14+3(1-e^{-t/10})+2(1-e^{-t/100})\right\}\times 10^{-6}$$

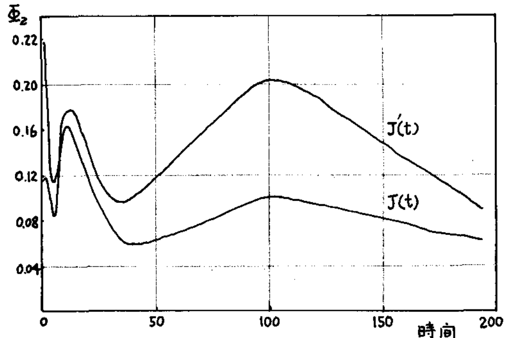
$$J'(t)=\left\{12+3(1-e^{-t/10})+4(1-e^{-t/100})\right\}\times 10^{-6}$$



図－6　遅延スペクトルの第1近似

これらは図－5のクリープ曲線とほぼ一致する。
もし、密接した遅延時間があれば、そのスペクトルは1つのピークとなってあらわれるので、1つの遅延要素であらわせる。その例が図－8で、この評価は次式となる。

$$J''(t)=\left\{10+7.5(1-e^{-t/10})\right\}\times 10^{-6}$$



図－7　遅延スペクトルの第2近似

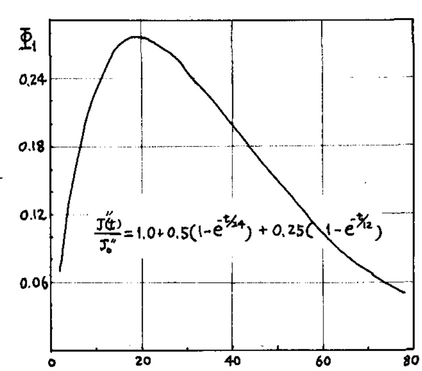
5．平板載荷試験による粘弾性定数の決定

以上述べてきた手法を、一定持続荷重を半無限体に加えた場合の変形曲線に適用し、岩盤の粘弾性定数を決定することができる。
いま、半無限弾性体の表面に置かれた半径 a の剛円板に荷重 P を載荷した場合、円板の沈下は次式によって与えられる。

$$w=\frac{P(1-\nu^2)}{2aE} \qquad (16)$$

一方、地盤を粘弾性体と仮定すれば、単位ステップ荷重 $P=P_0\cdot 1(t)$ に対して

$$w(s)=\frac{P_0(1-\nu^2)}{2a}\cdot\frac{1}{s^2E(s)} \qquad (17)$$



図－8　密接した遅延スペクトル

が得られる。ここでポアソン比 ν は時間的に変化しないものと仮定している。式(3)を用いれば、$\bar{J}(s)$ との関連もあきらかとなり、結局、沈下 $w(t)$ を観察することにより、岩盤の粘弾性特性をクリープ関数あるいは緩和関数の形で表示することができる。

6．結　言

粘弾性体を力学モデルで扱う場合の統一的手法を考察した。その結果、従来個々に提案されているモデルを図－3のモデルに含めて一般的に考えることができ、また、このモデル定数を決定する際、まず試験データから遅延スペクトルを求めれば、材料そのものの特性を見誤ることなく決めうることがわかった。

参考文献

1)．山本三三三；物体の変形学，誠文堂新光社
2)．色部　誠，赤木知之； Maxwell材料における粘弾性定数の一決定法，土木学会論文報告集．No. 213

On the estimation of viscoelastic constant about rock-ground

Tomoyuki Akagi
Depart. of civil engineering
Akita University

Summary

It is convenient that use the rheological model to explain the time dependent of rock-ground behaviour.
Many rheological models have proposed from ancient times. Maxwell, Voigt, Kelvin, Zenner and Bürger used Original models to interpret the behaviour of Viscoelastic materials.
But these models represent the restricted behaviour of viscoelastic materials.

In this paper, generalized model is suggested to contain the above models by introduction of infinite retardation time.
There are two sets in this model, one consist of Maxwell element, another consist of Voigt element, and it is corresponds to the relaxation function and the creep function, respectively.
These models are equivalent at any condition.
Method of the estimation about model constants is proposed.
If retardation time spectrum obtain from experimental creep curve, the model constant is determined easily and formally.