

山梨大学・工学部・平島健一
神戸大学・大学院 又武勝保

1. 緒言

二次元弾性板内に二個の内孔と設けた場合の孔周辺に生じる応力は従来より、双極座標系による方法、複素変数法その他の手法を用いて解析が行なわれている。これらのうち、外荷重自身と応力関数式で表示した双極座標系での解析方法は任意分布の外荷重状態の場合に対しては繁雑すぎて一般性に乏しく、また選点法と組み合わせた複素変数法は内孔間隔が近接すると収束性が低下し、計算時間が長くなるという欠点がある。本文では、これらの欠点を取り除くために外荷重を級数展開し、双極座標系による解法を用いて、孔径に比して充分遠方より作用する三次元的に傾斜した地山荷重のもとでの二内形坑道間縁の応力分布の数値例を示す。この方法で求めた結果と他の解法によるものととの比較を行ない、三次元的な地山荷重下の近接二内形坑道間縁の応力分布の例と具体的に示す。

2. 解法の概略

面内に作用する外荷重応力 σ_x^0 , σ_y^0 および τ_{xy}^0 に対する解法は双極座標系を用いて、Jeffery¹⁾以下、多くの研究者により式の誘導ならびに幾つかの数値計算例が示されているので、ここでは、二個の内形坑道の孔径に比較して充分遠方から面外 (z 軸) 方向の外荷重 τ_{xz}^0 および τ_{yz}^0 が作用する場合の解法の概要を述べよう。

いま、次式で定義されるような双極座標系:

$$\alpha + i\beta = \log \frac{x + i(y + a_0)}{x + i(y - a_0)} \quad (1)$$

と考えるものとすれば、 $\alpha = \text{const.}$ の曲線は二内孔の境界とその一部分とする内孔群であり、 $\beta = \text{const.}$ はこれに直交するような内孔群を表わす (Fig. 1 参照)。

この座標系を用いて Fig. 2 に示す外荷重応力のうち、面外 (z 軸) 方向のせん断荷重 τ_{xz}^0 , τ_{yz}^0 の作用のもとで、変位の一価性と満足するように応力関数 $\psi(\alpha, \beta)$ を次式のように仮定する。

$$\psi(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ P_n(\alpha) \cos n\beta + Q_n(\alpha) \sin n\beta \right\} \quad (2)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} P_n(\alpha) &= E_n \cosh n\alpha + F_n \sinh n\alpha \\ Q_n(\alpha) &= E'_n \cosh n\alpha + F'_n \sinh n\alpha \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

とすると、外荷重 τ_{xz}^0 , τ_{yz}^0 が作用する場合の内孔のはり弾性体の假想内孔 ($\alpha = \alpha_0$ の線上) の周縁における応力 $\tau_{\alpha z}^0$, $\tau_{\beta z}^0$

Fig. 1

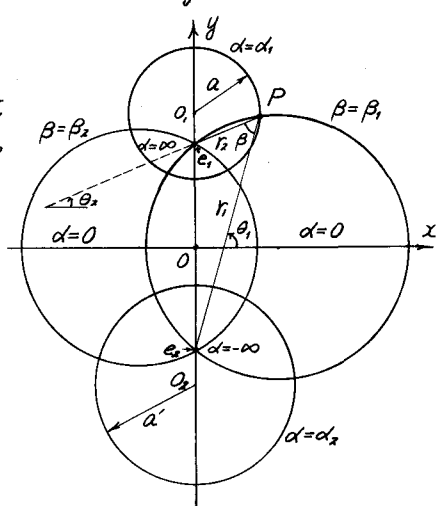
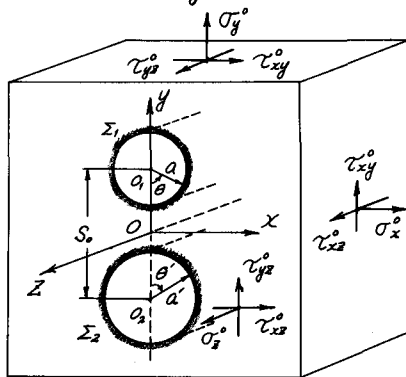


Fig. 2



と級数表示すれば、次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{az}^0 &= -\tau_{yz}^0 e^{i\alpha} + 2 \sinh \alpha \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha} (\tau_{xz}^0 \sin n\beta \pm \tau_{yz}^0 \cos n\beta) \\ \tau_{pz}^0 &= \tau_{xz}^0 e^{i\alpha} + 2 \sinh \alpha \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha} (\tau_{yz}^0 \sin n\beta \mp \tau_{xz}^0 \cos n\beta) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ただし、 $\alpha > 0$ のとき上側の符号と、 $\alpha < 0$ のとき下側の符号をとるものとする。

しかるに、実際には二個の内孔縁は自由境界であるから、境界条件として、式(4)における τ_{az}^0 ($\alpha = \alpha_j$ の内に対する法線方向の面外せん断応力)と絶対値が等しく反対符号の外荷重 $-\tau_{az}^0$ と $\alpha = \alpha_j$ の円孔周縁に作用せねばならない。

双極座標系で表わした面外せん断応力 τ_{az}^1 , τ_{pz}^1 は式(2)の応力関数を用いて

$$\left. \begin{aligned} \tau_{az}^1 &= h \frac{\partial \psi}{\partial \beta}, \quad \tau_{pz}^1 = h \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \\ h &= \frac{1}{a} (\cosh \alpha - \cos \beta) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

で与えられるから、したがって面外せん断応力 τ_{az} , τ_{pz} は式(4)および式(5)の結果を重ね合わせれば、無限遠より τ_{xz}^0 , τ_{yz}^0 が作用する場合の二個の自由境界の内孔周縁における応力値となる。

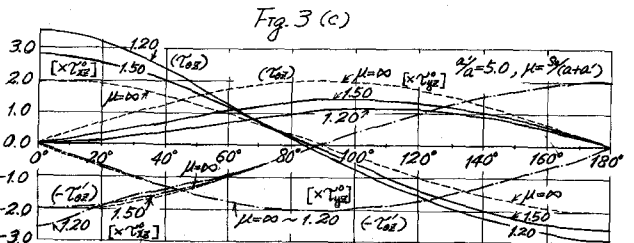
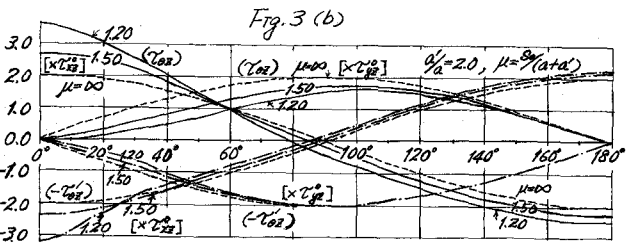
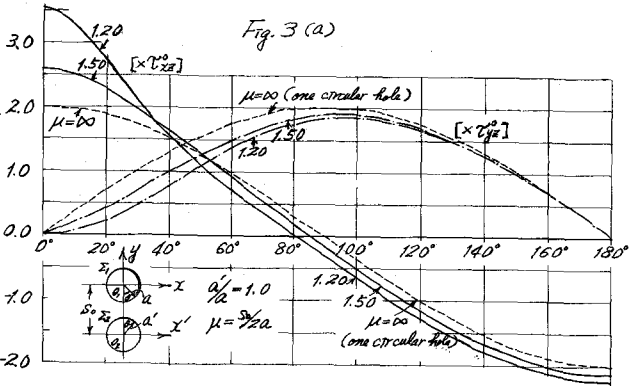
3. 解法の精度

面内荷重 σ_x , σ_y および τ_{xy} が作用する場合の二個の等、あるいは不等円孔周縁の応力分布に対する精度は従来までの研究者による結果と比較して非常によく一致している。例えば、 $\sigma = \sigma_x$ では数値表は省略するが、Haddon²⁾の求めた結果との差異は、中心間隔 S_0 と各パラメータとしたすべての計算例に対し 0.2% 程度以内である。

次に、面外荷重 τ_{xz} , τ_{yz} が作用する場合の上述の解法と複素変数法に逐点法とを組み合わせた解析手法³⁾による計算例の一列を示せば Table 1 のようである。これは二個の等円孔 Σ_1, Σ_2 が $S_0/2a = 1.20$ の離隔距離の位置に存在する場合の孔 Σ_1 の周縁での応力 τ_{az} の値である。これはより両者の解法は非常に精度で一致しているといえよう。その他の離隔距離パラメータ $S_0/2a$ についての例についても同様のこ

Table 1. Two Equal Holes ($a=a'$)
 $S_0/2a = 1.20$

θ	τ_{az} around Σ_1 ($\times \tau_{xz}^0$)		τ_{az} around Σ_2 ($\times \tau_{yz}^0$)	
	Bipolar Solution	Point Matching ³⁾	Bipolar Solution	Point Matching ³⁾
0°	3.535	3.532	0.000	0.008
15°	3.020	3.019	0.136	0.136
30°	2.104	2.104	0.473	0.473
45°	1.355	1.356	0.945	0.945
60°	0.765	0.765	1.378	1.378
75°	0.231	0.234	1.681	1.681
90°	0.289	0.289	1.825	1.825
105°	-0.793	-0.793	1.810	1.811
120°	-1.260	-1.260	1.649	1.649
135°	-1.660	-1.660	1.359	1.359
150°	-1.967	-1.967	0.966	0.966
165°	-2.161	-2.161	0.501	0.501
180°	-2.227	-2.227	0.000	0.002



とがわかる。したがって、本解法は面内、面外荷重下において、 S/a の充分小さい値の場合に対しても非常に高精度の結果がえられると結論することができよう。

4. 数値計算例

Table 2 は大きさの異なる二個の円孔 Σ_1, Σ_2 の間隙に生じる最大最小の σ_θ および τ_{xy} と $S/(a+a')$ および面内、面外荷重 $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0, \tau_{xz}^0, \tau_{yz}^0$ とパラメータとして表示したものである。とくに二個の円孔 Σ_1, Σ_2 の径が等しい場合については、孔 Σ_1 の周縁上の 15° 間隔の位置の応力値と Table 3 に示した。この表中にはパラメータ S/a と 1.50 および 1.20 とした場合が示されている。なお、面外荷重 τ_{xz}^0, τ_{yz}^0 の場合については Table 1 に $S/a =$

1.20 の結果が示されているので、この表ではその場合の結果は省略してある。

次に興味ある計算例を示そう。Fig. 4 は二個の等円孔に面内荷重 $\sigma_y^0 = 1.0$ が作用する場合の A 点 (i.e. $\theta = 0^\circ$ の点) に生じる σ_θ の値を図示および表示したものである。 S/a (i.e. $1/p$) があつた程度大きい場合は、この点の応力 σ_θ は減少するが、 $S/a = 1.50$ 程度の所で最下限度が存在し、それ以後は応力増大の現象が認められる。このことに関しては橋戸博士⁴⁾も示し、図にみるような一点鎖線の応力変化を表示しているが、著者らの結果とはかなりの相違がある。ちなみに、Haddon の結果とみると $S/a = 1.05$ のとき、A 点での応力 σ_θ として著者らと同一の結果 $(\sigma_\theta)_{0.0} = -0.970$ と与えて²⁾いる。

Fig. 4

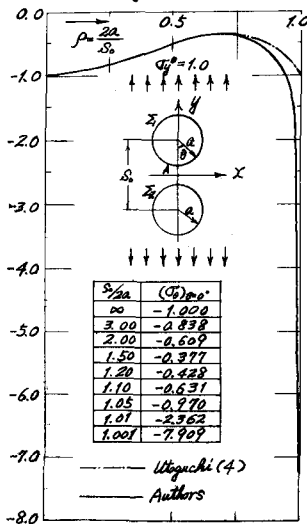


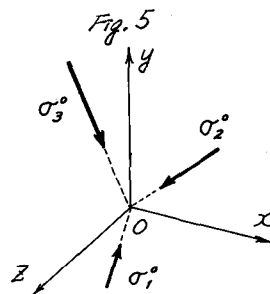
Table 2 Maximum and Minimum Stresses σ_θ, τ_{xy} around Holes

a'/a	$S/(a+a')$		$\sigma_x^0=1.0$	$\sigma_y^0=1.0$	$\tau_{xy}^0=1.0$	$\tau_{xz}^0=1.0$	$\tau_{yz}^0=1.0$
2.00	1.20	Σ_1	5.117 -0.619	1.895 -0.735	± 5.943	3.609 -2.453	± 1.595
		Σ_2	3.688 -1.040	2.936 -0.987	± 4.848	3.239 -2.091	± 1.955
	1.50	Σ_1	3.513 -0.643	2.115 -0.738	± 5.462	2.725 -2.288	± 1.695
		Σ_2	3.096 -0.997	2.910 -0.977	± 4.165	2.404 -2.058	± 1.955
	3.00	Σ_1	3.035 -0.842	2.655 -0.873	± 4.391	2.127 -2.087	± 1.906
		Σ_2	3.009 -0.972	2.934 -0.976	± 4.094	2.043 -2.017	± 1.980
5.00	1.20	Σ_1	5.632 -0.581	0.878 -0.681	± 5.184	3.508 -2.810	± 1.186
		Σ_2	3.043 -1.023	3.000 -0.998	± 4.022	2.670 -2.021	± 1.995
	1.50	Σ_1	3.778 -0.391	1.337 -0.509	± 5.491	2.810 -2.517	± 1.436
		Σ_2	3.022 -1.010	2.994 -0.995	± 4.025	2.167 -2.013	± 1.993
	3.00	Σ_1	2.934 -0.682	2.412 -0.728	± 5.198	2.174 -2.139	± 1.848
		Σ_2	2.991 -1.008	2.987 -1.000	± 4.018	2.013 -2.004	± 1.995

Table 3 Stress Distributions around Two Equal Circular Holes

θ	σ_θ around hole Σ_1						τ_{xy} around Σ_1	
	$\sigma_x^0 = 1.0$		$\sigma_y^0 = 1.0$		$\tau_{xy}^0 = 1.0$		$\tau_{xz}^0 = 1.0$	$\tau_{yz}^0 = 1.0$
	$S/a = 1.50$	$S/a = 1.20$	$S/a = 1.50$	$S/a = 1.20$	$S/a = 1.50$	$S/a = 1.20$	$S/a = 1.50$	$S/a = 1.50$
0°	3.246	4.417	-0.379	-0.430	0.000	0.000	2.594	0.000
15°	3.078	3.817	-0.407	-0.415	3.617	5.485	2.420	0.318
30°	2.416	2.695	-0.258	-0.392	4.983	5.221	1.999	0.702
45°	1.434	1.438	0.366	0.121	4.469	3.415	1.484	1.117
60°	0.293	0.221	1.313	1.122	3.047	1.839	0.948	1.484
75°	-0.545	-0.629	2.177	2.073	1.199	0.241	0.404	1.740
90°	-0.888	-0.926	2.623	2.581	-0.839	-1.532	0.141	1.858
105°	-0.631	-0.622	2.516	2.499	-2.786	-3.209	-0.668	1.829
120°	0.090	0.160	1.909	1.905	-4.105	-4.364	-1.151	1.659
135°	1.113	1.216	1.000	0.996	-4.484	-4.639	-1.564	1.365
150°	2.142	2.263	0.059	0.051	-3.774	-3.867	-1.879	0.969
165°	2.878	3.020	-0.639	-0.647	-2.144	-2.190	-2.077	0.503
180°	3.143	3.295	-0.896	-0.903	-0.003	0.000	-2.144	0.000

面外荷重 $\sigma_{xz}^0, \tau_{yz}^0$ が作用する場合に二円孔 Σ_1, Σ_2 の周縁に生じるせん断応力 $\tau_{\theta z}^0, \tau_{\theta\theta}^0$ の分布図と、円孔径比 a/a' および中心間距離 $S_0(a+a')$ をパラメータとして展開図として示したものが Fig. 3 である。図には a/a' として 1.0, 2.0 および 5.0 の三種類の場合に対して、 $\mu = S_0(a+a')$ とそれぞれ $\infty, 1.50$ および 1.20 とした応力線図が与えられている。点線は $\mu = \infty$ (i.e. 一円孔のみが存在する場合) の分布図であり、実線は τ_{xz}^0 が、また一点鎖線は τ_{yz}^0 がそれぞれ独立に作用した場合の分布図である。 τ_{xz}^0 が作用する場合、 $\theta = \theta' = 0^\circ$ 付近に大きな応力集中が生じ、一方 τ_{yz}^0 が作用する場合に図にみるように、応力集中はむしろ減少する傾向を示す。

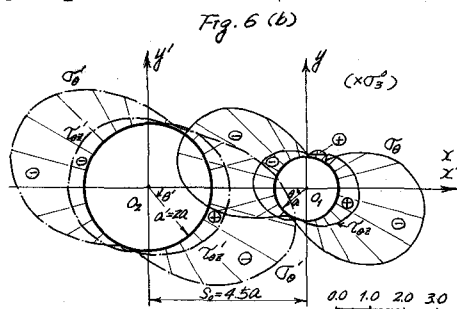
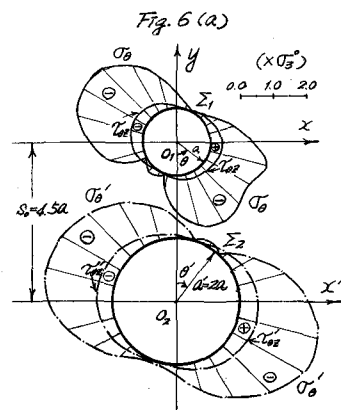


	direction of σ_1^0	direction of σ_2^0	direction of σ_3^0
x	64° 14'	32° 43'	71° 15'
y	119° 37'	94° 20'	30° 00'
z	41° 09'	122° 22'	67° 27'

$$\sigma_2^0 = \frac{1}{3}\sigma_3^0, \quad \sigma_1^0 = \frac{1}{4}\sigma_3^0$$

$$\left[\begin{aligned} \sigma_x^0 &= 0.387\sigma_3^0, & \sigma_y^0 &= 0.813\sigma_3^0, & \sigma_z^0 &= 0.384\sigma_3^0 \\ \tau_{xy}^0 &= 0.203\sigma_3^0, & \tau_{xz}^0 &= 0.055\sigma_3^0, & \tau_{yz}^0 &= 0.253\sigma_3^0 \end{aligned} \right]$$

以上で示した幾つかの数値計算結果を適宜に重ね合わせることで、充分遠方より作用する一般的な三次元地山荷重 (= 円形坑底の軸に対して任意の傾斜角を有する三つの直交する主応力 σ_1^0, σ_2^0 および σ_3^0) 下の二個の円形坑底周縁における応力 $\sigma_\theta, \tau_{\theta z}$ および $\tau_{\theta\theta}$ と計算することが可能である。ここでは、その一例として Fig. 5 に示すような地山荷重 σ_1^0, σ_2^0 および σ_3^0 と仮定した場合⁵⁾ についでに $\sigma_\theta, \tau_{\theta z}$ の分布を示そう。Fig. 6 (a) および (b) は $a/a' = 2.0$, $S_0 = 4.5a$ の位置に存在する二個の円形坑底 Σ_1, Σ_2 の周縁での応力 $\sigma_\theta, \tau_{\theta z}$ および $\sigma_\theta', \tau_{\theta z}'$ の分布図である。Fig. 5 の地山荷重 σ_1^0, σ_2^0 および σ_3^0 は図中で示したように、座標系 (x, y, z) 内の応力成分に分解することができるとはならず、いままでの計算結果と単純に重ね合わせることで、円孔周縁応力が求められる訳である。なお、本例では面外方向の主応力 σ_z の分布は示さなかったが、これは坑底軸が円孔径に比較して充分に長いものと仮定し、かつ地山構成材のポアソン比 ν が与えられるものとすれば、簡単に計算できるものである⁵⁾。その他の荷重形式、孔径比 a/a' は中心間距離の場合についても同様の手法により円孔内部の応力分布を求めることができる。



参考文献

- 1) Jeffery, G. B.: Plane Stress and Plane Strain in Bipolar Coordinates, Phil. Trans., Vol. 221 (1921), pp. 265-293
- 2) Haddon, R. A. W.: Stresses in an Infinite Plate with Two Unequal Circular Holes, Quart. J. Mech. Appl. Math. Vol. 20 (1963), pp. 277-291
- 3) 平島健一: 面外せん断力を受ける弾性体内の複数個の円孔周縁応力, 変形, 山梨大学工学部研究報告, Vol. 23 (1972), pp. 14-23
- 4) 鶴ヶ口英善: 二円孔を有する板の平面応力問題, 応用数学力学, I-1 (1947), pp. 14-28, I-2 (1947), pp. 61-81
- 5) 丹羽, 小林, 平島: 三次元直交異方性弾性半無限体の円形坑底周縁の応力分布変形, 土木学会論文報告集, No. 173 (1970), pp. 7-17

Stress Distributions Around Two Adjoining Circular Tunnels Under Three-Dimensional Stress State

Ken-ichi Hirashima
Dept. of Civil Engineering, Yamanashi University
Masayasu Hisatake
Graduate Student of Kobe University

1. Introduction

For plane problem with two circular holes, some methods of analyses such as bipolar coordinates method, complex variable method with combined to point matching technique and so on have been used to obtain the solution of stresses and deformations around the holes. We use the solution of bipolar coordinates for the case of two adjoining circular openings under two-dimensional (i.e. plane) loads σ_x^∞ , σ_y^∞ and τ_{xy}^∞ at infinity, and extend this solution to antiplane problem such as longitudinal loads τ_{xz}^∞ and τ_{yz}^∞ at infinity. Combining with these solutions, the present paper describes the closed solution for the case of an infinite elastic medium containing two adjoining circular tunnels, when the loads apply at infinity with three-dimensional stress state.

2. Solution for Antiplane Loadings

Let us take curvilinear coordinates defined by the conjugate functions:

$$\alpha + i\beta = \log \frac{x + i(y+a)}{x + i(y-a)} \quad (1)$$

where x, y are the Cartesian coordinates and a is a positive real length. The general scheme of the coordinates is shown in Fig. 1. The curves $\alpha = \ln \frac{r_1}{r_2} = \text{const.}$ are a set of co-axial circles having e_1, e_2 for limiting points. The curves $\beta = \theta_1 - \theta_2 = \text{const.}$ are circles passing through e_1, e_2 and intersecting to the first set of circles orthogonally. Under the antiplane loads $\tau_{xz}^\infty, \tau_{yz}^\infty$ applied at infinity, we can set

$$\psi(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ P_n(\alpha) \cos n\beta + Q_n(\alpha) \sin n\beta \} \quad (2)$$

where,

$$\left. \begin{aligned} P_n(\alpha) &= E_n \cosh n\alpha + F_n \sinh n\alpha \\ Q_n(\alpha) &= E'_n \cosh n\alpha + F'_n \sinh n\alpha \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

When the body with no holes are applied by the loads τ_{xz}^∞ and τ_{yz}^∞ at infinity, shearing stresses τ_{xz}^∞ and τ_{yz}^∞ on the virtual contours of two circular holes (e.g. the contours $\alpha = \alpha_j, j=1,2$) can be given as

$$\tau_{xz}^\infty = -\tau_{yz}^\infty e^{i\alpha} + 2 \sinh \alpha \sum_{n=1}^{\infty} e^{in\alpha} (\tau_{xz}^\infty \sin n\beta \pm \tau_{yz}^\infty \cos n\beta), \quad \tau_{yz}^\infty = \tau_{xz}^\infty e^{i\alpha} + 2 \sinh \alpha \sum_{n=1}^{\infty} e^{in\alpha} (\tau_{yz}^\infty \sin n\beta \mp \tau_{xz}^\infty \cos n\beta) \quad (4)$$

where upper sign is for the case of $\alpha > 0$ and lower sign for $\alpha < 0$.

On the other hand, τ_{xz}^1 and τ_{yz}^1 are expressed from the relation of stress function $\psi(\alpha, \beta)$ by the following formulae:

$$\tau_{xz}^1 = h \frac{\partial \psi}{\partial \beta}, \quad \tau_{yz}^1 = h \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}, \quad h = \frac{1}{a} (\cosh \alpha - \cos \beta) \quad (5)$$

As was shown above, when obtaining the stresses in the body under consideration without openings subjected to uniform longitudinal loads τ_{xz}^∞ and τ_{yz}^∞ at infinity, stresses in the body with two circular holes can be calculated as follows. Firstly, we calculate the radial shearing stresses τ_{xz}^∞ on the virtual contours of holes which would be perforated in the body, from eq.(4). Then, we calculate the stresses by eq.(5) when the external loads equal the magnitude and opposite sign of the stresses in the above are applied on the contours of the body. And then we can solve the problem under consideration by superimposing the stress components τ_{xz}^1, τ_{yz}^1 by eq.(5) to $\tau_{xz}^\infty, \tau_{yz}^\infty$ by eq.(4).