

表面波を受ける埋設管の動的挙動について

神戸大学工学部 正員 桜井春輔 学生員 ○ 梶 太郎

1. ま え が き

地震波は実体波と表面波(地表面付近に生ずる)とからなり、表面波は振中の深さ方向への減少が著しいため、波の伝播が平面的となり、立体的に伝播する実体波に比較して距離による減衰性が少なく、遠方まで伝わる事が可能である。従って、表面波の生ずる地域の埋設管は表面波によって、どのような動的挙動を示すかを知ることは重要である。

ここでは、先ず、埋設管の中立軸が地表面に平行に深さ方向にあるものと考え、中立軸を z 軸、深さ方向に y 軸をとり、表面波を表わす。そして、その表面波の動的変位が中立軸、即ち z 軸近傍において深さ方向に変化がないものとしてえられた近似波動を入射波として、無限に広い等方均質な弾性地山中の z 軸を中立軸にもつ弾性パイプに長手方向に作用させたときの地山とパイプの境界に生ずる応力を三次元弾性波動論で求め、更にそれらを埋設管に作用する強制外力と考え、埋設管を中空断面積を有するはりの強制曲げ振動問題、又棒の強制縦振動問題として解析をおこなった。この解析法からみて、埋設管が非常に浅い位置にある場合と埋設管半径が表面波の波長に比べ大きい場合は適用し難い。

2. 入 射 波

$y = -h$ が地表面であるときの、 z 軸の負方向に向か、てすすむ表面波(Rayleigh Wave)は、円振動数を ω とすると次式で表わせる。¹⁾

$$\begin{aligned} v &= -k_R A \{ \alpha \exp[-\alpha k_R (y+h)] + r \exp[-\beta k_R (y+h)] \} \exp[i(k_R z + \omega t)] \\ w &= i k_R A \{ \exp[-\alpha k_R (y+h)] - \beta r \exp[-\beta k_R (y+h)] \} \exp[i(k_R z + \omega t)] \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここで、 A は k_R に依存する定数であり、 α, β, r は次式で表わされる定数である。

$$\alpha = \sqrt{1 - (k_p/k_R)^2}, \quad \beta = \sqrt{1 - (k_s/k_R)^2}, \quad r = \frac{-2\alpha\beta}{2 - (k_s/k_R)^2} \quad (2.2)$$

k_s, k_p, k_R は波数で、 $C_s (= \sqrt{\frac{G}{\rho}})$ をせん断波の速度、 $C_p (= \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}})$ を粗密波の速度とすると次のように書ける。 $(G: \text{せん断弾性定数}, \rho: \text{単位体積重量}, \nu: \text{ポアソン比}, g: \text{重力加速度})$

$$k_s = \omega/C_s, \quad k_p = \omega/C_p, \quad k_R = \omega/C_R \quad (2.3)$$

尚、 C_R は表面波の速度で、Rayleigh の方程式を満足せねばならぬ。

埋設管の外径を a とすると、埋設管近傍($-a \leq y \leq a$)での表面波は、 α, β が1より小であるから、 $k_R a$ が1より十分に小さいときには、(2.1)式をマクローリン展開して第1項とすれば工学的に十分近似できる。即ち、

$$\begin{aligned} v &= v_0 \exp[i(k_R z + \omega t)] \\ w &= w_0 \exp[i(k_R z + \omega t)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

ここで、

$$v_0 = -k_R A \{ \alpha \exp(-\alpha k_R h) - r \exp(-\beta k_R h) \}$$

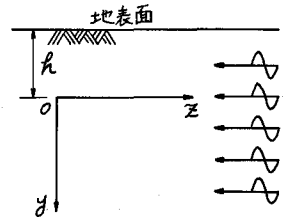


Fig. 1

$$w_0 = i k_R A \{ \exp(-\alpha k_R h) - \beta r \exp(-\beta k_R h) \} \quad (2.5)$$

円柱座標においては次のように表わされ、この波を入射波として考える。

$$\begin{aligned} u_r &= V_0 \sin \theta \cdot \exp\{i(k_R z + \omega t)\} \\ u_\theta &= V_0 \cos \theta \cdot \exp\{i(k_R z + \omega t)\} \\ u_z &= W = w_0 \cdot \exp\{i(k_R z + \omega t)\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

3. 基礎方程式

2. で述べた入射波が埋設管に作用した場合に生じる変位ポテンシャル（変位、応力）は次のように変数分離が可能である。

$$\begin{aligned} \phi &= \bar{\phi} \exp\{i(k_R z + \omega t)\} \\ \psi_r &= \bar{\psi}_r \exp\{i(k_R z + \omega t)\}, \quad \psi_\theta = \bar{\psi}_\theta \exp\{i(k_R z + \omega t)\}, \quad \psi_z = \bar{\psi}_z \exp\{i(k_R z + \omega t)\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここで、 $\bar{\phi}, \bar{\psi}_r, \bar{\psi}_\theta, \bar{\psi}_z$ は r と θ で表わされる複素関数である。故に、波動方程式より、地山中における基礎方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{\phi} - k^2 \bar{\phi} &= 0 \\ \nabla^2 \bar{\psi}_r - k^2 \bar{\psi}_r &= \frac{1}{r^2} \left(\bar{\psi}_r + 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{\psi}_\theta \right) \\ \nabla^2 \bar{\psi}_\theta - k^2 \bar{\psi}_\theta &= \frac{1}{r^2} \left(\bar{\psi}_\theta - 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{\psi}_r \right) \\ \nabla^2 \bar{\psi}_z - k^2 \bar{\psi}_z &= 0 \\ \bar{\psi}_z &= \frac{i}{k_R} \left(\frac{\partial}{\partial r} \bar{\psi}_r + \frac{1}{r} \bar{\psi}_r + \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{\psi}_\theta \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2}, \quad (3.3) \\ k^2 &= k_R^2 - k_p^2, \quad k^2 = k_R^2 - k_s^2 \end{aligned}$$

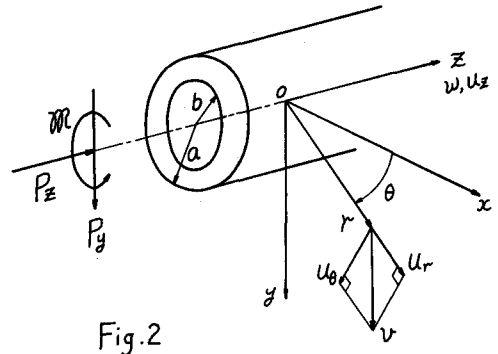


Fig.2

埋設管を中空断面積をもつ無限のはり、又棒

と考え、強制外力、強制モーメントを受ける強制振動問題として取り扱う。埋設管に関して次の基礎方程式がえられる。

$$\begin{aligned} E_L I \frac{\partial^4 u_c}{\partial z^4} + \frac{P_L I}{g} \frac{\partial^2 u_c}{\partial z^2} - \left(\frac{P_L I}{g} + \frac{E_L I P_L}{4 g G_L} \right) \frac{\partial^4 u_c}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{P_L I}{g} \frac{P_L}{4 g G_L} \frac{\partial^4 u_c}{\partial t^4} &= \left(1 - \frac{E_L I}{A k G_L} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) P_y + \frac{\partial}{\partial z} M \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} u_c &= C_p \frac{\partial^2}{\partial z^2} u_c + P_z \end{aligned} \quad (3.4)$$

ここで、 E_L は埋設管の弾性定数で、その他 L は下添字がついている記号は、それが埋設管におけるものであることを示している。 A は断面積、 I は断面 2 次モーメント。 $k = 3(a^2 + b^2)/4(a^2 + ab + b^2)$ 。 u_c, u_θ は夫々埋設管の中立軸の y 方向の変位、 z 方向の変位であり、 P_y, P_z, M は地山と埋設管の相互作用によって生じる強制外力、強制モーメントで次のように変数分離が可能である。(Fig. 2)

$$\begin{aligned} u_c &= \bar{u}_c \exp\{i(k_R z + \omega t)\}, \quad u_\theta = \bar{u}_\theta \exp\{i(k_R z + \omega t)\} \\ P_y &= \bar{P}_y \exp\{i(k_R z + \omega t)\}, \quad P_z = \bar{P}_z \exp\{i(k_R z + \omega t)\}, \quad M = \bar{M} \exp\{i(k_R z + \omega t)\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

故に、(3.4) 式は次のように書き換えられる。尚、 $k_R a \ll 1$ のとき、 $\frac{E_L I k_R^2}{A k G_L} \bar{P}_y \ll \bar{P}_y$ 。

$$\begin{aligned} \textcircled{H} \bar{u}_c &= \bar{P}_y + i k_R \bar{M} \\ (k_R^2 C_p^2 - \omega^2) \bar{u}_c &= \frac{g}{P_L} \bar{P}_z \quad \left(\textcircled{H} = E_L I k_R^4 - \frac{P_L A \omega^2}{g} - k_R^2 \left(\frac{P_L I}{g} + \frac{E_L I P_L}{4 g G_L} \right) + \frac{P_L^2 I}{g^2} \frac{\omega^4}{4 G_L} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

4. 反射波及び屈折波

地山中での反射波及び屈折波はすべて z 軸から外に広がる波動であり、(3.2) 式を満足するから

次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned}\bar{\Phi} &= A_0 H_0^{(0)}(ika) + A_1 H_1^{(0)}(ika) \sin \theta \\ \bar{\Psi}_r &= B_0 H_1^{(0)}(ika) + \{B_1 H_0^{(0)}(ika) + C_1 H_2^{(0)}(ika)\} \cos \theta \\ \bar{\Psi}_\theta &= -C_0 H_1^{(0)}(ika) + \{-B_1 H_0^{(0)}(ika) + C_1 H_2^{(0)}(ika)\} \sin \theta \\ \bar{\Psi}_z &= -\frac{k}{k_R} B_0 H_0^{(0)}(ika) + \left\{ \frac{k}{k_R} B_1 H_1^{(0)}(ika) - \frac{k}{k_R} C_1 H_2^{(0)}(ika) \right\} \cos \theta\end{aligned}\quad (4.1)$$

ここで、 $A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1$ は境界条件によって決まる積分定数であり、 $H_0^{(0)}(x), H_1^{(0)}(x), H_2^{(0)}(x)$ は、夫々 0 次、1 次、2 次のハンケル第 1 種関数である。

5. 地山と埋設管の境界面の変位及び応力

地山と埋設管とが半径方向、円周方向、管軸方向に対して相対的なずれがないものとする。境界面において、応力 $\sigma_r, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}$ は地山と埋設管で等しくなる。境界面の変位、応力を表わすと次のようになる。

$$\begin{aligned}\bar{U}_r &= \{-A_0 i k H_0^{(0)}(ika) + C_0 i k H_1^{(0)}(ika)\} + \left\{ A_1 \left\{ -\frac{1}{a} H_1^{(0)}(ika) + i k H_0^{(0)}(ika) \right\} \right. \\ &\quad \left. + B_1 \left\{ -\frac{k}{k_R a} H_1^{(0)}(ika) + i k H_0^{(0)}(ika) \right\} + C_1 \left\{ \frac{k}{k_R a} H_1^{(0)}(ika) - i k H_2^{(0)}(ika) \right\} + v_0 \right\} \sin \theta\end{aligned}\quad (5.1)$$

$$\begin{aligned}\bar{U}_\theta &= \{B_0 \frac{i k^2}{k_R} H_1^{(0)}(ika)\} + \left\{ A_1 \left\{ \frac{1}{a} H_1^{(0)}(ika) \right\} \right. \\ &\quad \left. + B_1 \left\{ \frac{k}{k_R a} H_1^{(0)}(ika) + \frac{i k^2}{k_R} H_0^{(0)}(ika) \right\} + C_1 \left\{ \frac{k}{k_R a} H_1^{(0)}(ika) + \frac{i k^2}{k_R} H_2^{(0)}(ika) \right\} + v_0 \right\} \cos \theta\end{aligned}\quad (5.2)$$

$$\begin{aligned}\bar{U}_z &= \{A_0 i k H_0^{(0)}(ika) - C_0 i k H_1^{(0)}(ika) + w_0\} \\ &\quad + \{A_1 i k H_1^{(0)}(ika) + B_1 i k H_1^{(0)}(ika) + C_1 i k H_2^{(0)}(ika)\} \sin \theta\end{aligned}\quad (5.3)$$

ここで、 $\bar{U}_\theta$ の第 1 項は対称性を満足しないから $B_0 = 0$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_r &= G \left\{ A_0 \left\{ (2k_R^2 - k^2) H_0^{(0)}(ika) + \frac{2i k^2}{a} H_1^{(0)}(ika) \right\} + C_0 \left\{ -\frac{2i k^2}{a} H_1^{(0)}(ika) - 2k k_R H_0^{(0)}(ika) \right\} \right. \\ &\quad \left. + i \left(\frac{k^2}{k_R^2} - 2 \right) k_R w_0 + A_1 \left\{ (2k_R^2 - k^2) H_1^{(0)}(ika) + \frac{2i k^2}{a} H_2^{(0)}(ika) \right\} \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + B_1 \left\{ \frac{2i k^2}{k_R a} H_2^{(0)}(ika) + 2k k_R H_1^{(0)}(ika) \right\} \sin \theta + C_1 \left\{ \frac{2i (k_R^2 + k^2)}{k_R a} H_2^{(0)}(ika) + 2k k_R H_1^{(0)}(ika) \right\} \sin \theta \right\}\end{aligned}\quad (5.4)$$

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{r\theta} &= G \left\{ A_1 \left\{ -\frac{2i k^2}{a} H_2^{(0)}(ika) \right\} \cos \theta + B_1 \left\{ \frac{k^2 - k}{k_R} H_1^{(0)}(ika) - \frac{2i k^2}{k_R a} H_2^{(0)}(ika) \right\} \cos \theta \right. \\ &\quad \left. + C_1 \left\{ -\frac{k^2 - k}{k_R} H_1^{(0)}(ika) - \frac{2i (k_R^2 + k^2)}{k_R a} H_2^{(0)}(ika) \right\} \cos \theta \right\}\end{aligned}\quad (5.5)$$

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{rz} &= G \left\{ A_0 \left\{ 2k k_R H_1^{(0)}(ika) \right\} + C_0 \left\{ -(k^2 + k_R^2) H_1^{(0)}(ika) \right\} \right. \\ &\quad \left. + A_1 \left\{ -\frac{2i k^2}{a} H_1^{(0)}(ika) - 2k k_R H_0^{(0)}(ika) \right\} \sin \theta + B_1 \left\{ -\frac{2i k^2}{a} H_1^{(0)}(ika) - (k_R^2 + k^2) H_0^{(0)}(ika) \right\} \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + C_1 \left\{ \frac{2i k^2}{a} H_1^{(0)}(ika) + (k_R^2 + k^2) H_0^{(0)}(ika) \right\} \sin \theta + i k_R v_0 \sin \theta \right\}\end{aligned}\quad (5.6)$$

故に、埋設管に作用する強制外力 $\bar{P}_y, \bar{P}_z$ 、強制モーメント $\bar{M}$ は次のように求まる。

$$\begin{aligned}\bar{P}_y &= \int_0^{2\pi} (\bar{\sigma}_r \sin \theta + \bar{\tau}_{r\theta} \cos \theta) a \cdot d\theta, \quad \bar{P}_z = \int_0^{2\pi} \bar{\tau}_{rz} a \cdot d\theta \\ \bar{M} &= \int_0^{2\pi} \bar{\tau}_{rz} a \sin \theta a \cdot d\theta\end{aligned}\quad (5.7)$$

6. 境界条件と積分定数の決定

$\bar{U}_r$ の第 1 項 (θ に関係しない項) は静水圧によって生じる変形を表わしており、埋設管の曲げによって生じる変形に比べ無視できるので

$$\bar{U}_r \text{ の第 1 項} = 0 \quad (6.1)$$

地山と埋設管の運動に $r = a$ の境界面で相対的なずれが発生しないこと条件は次のようにかかる。

$$\bar{U}_r = \bar{v}_c \sin \theta, \quad \bar{U}_\theta = \bar{v}_c \cos \theta, \quad \bar{U}_z \text{ の第 1 項} = \bar{w}_c \quad (6.2)$$

又、埋設管の曲げやせん断によって生じる回転角においても次のようにかかる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{U}_c = i k_R \bar{U}_c = - \left(\bar{U}_2 \text{の第2項} \right) \quad (6.3)$$

(3.6)の基礎方程式から2つの境界条件が考えられ、すべての積分定数を決定でき、 w_c , U_c が決まる。

$$\frac{\bar{w}_c}{w_0} = \frac{2\pi k_R a - \frac{1}{A}}{\left\{ i k_R^2 \left(1 - \frac{k_R^2}{k_L^2}\right) \frac{H_0''(ika)}{H_1''(ika)} - i k_R' \left(1 - \frac{k_R^2}{k_L^2}\right) \frac{H_0''(ika)}{H_1''(ika)} + \frac{2\pi k_R a}{A} \right\}} \quad (6.4)$$

$$\frac{\bar{U}_c}{U_0} = - \frac{A_1}{a} H_1''(ika) - \frac{k}{k_R a} (B_1 + C_1) H_1''(ika) \quad (6.5)$$

ここで、 A_1, B_1, C_1 は次の連立方程式の解である。

$$\begin{Bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ k_R^2 a \end{Bmatrix} \quad (6.6)$$

但し、

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= -\frac{2}{a} H_1''(ika) + i k' H_0''(ika) \\ \Delta_{12} &= -\frac{2k}{k_R a} H_1''(ika) + \frac{i k^2}{k_R} H_0''(ika) \\ \Delta_{13} &= \frac{-2(k_R^2 + k^2)}{k k_R a} H_1''(ika) + \frac{i(k_R^2 + k^2)}{k_R} H_0''(ika) \\ \Delta_{21} &= i k' H_0''(ika) \\ \Delta_{22} &= i k_R H_0''(ika) \\ \Delta_{23} &= \frac{-2k^2}{k k_R a} H_1''(ika) + i k_R H_0''(ika) \\ \Delta_{31} &= \left\{ (4k_R^2 - k^2) + \frac{0}{G\pi a^2} \right\} H_1''(ika) - 2i k k_R^2 a H_0''(ika) \\ \Delta_{32} &= \frac{k}{k_R} \left\{ (k_R^2 + 4k^2) + \frac{0}{G\pi a^2} \right\} H_1''(ika) - i k_R (k_R^2 + k^2) a H_0''(ika) \\ \Delta_{33} &= \frac{k}{k_R} \left\{ (4k_R^2 - 3k^2) + \frac{0}{G\pi a^2} \right\} H_1''(ika) - i k_R (k_R^2 + k^2) a H_0''(ika) \end{aligned} \quad (6.7)$$

参考文献

- 1) Y. C. Fung, *Foundation of Solid Mech.*, Prentice-Hall, 1965.
- 2) 桜井春輔・梶太郎, “トンネル周辺の動的応力分布について”, 関西支部年次学術講演概要, 昭和47年, 6月.
- 3) 後藤尚男・土岐憲三・高田至郎, “表層地盤内にある埋設管の耐震性について”, 京都大学防災研究所年報, 第15号B, 昭和47年.
- 4) Y. H. Pao, “Dynamical Stress Concentration in an Elastic Plate”, *Journal of Applied Mech.*, vol. 29, No. 2, Trans. ASME, vol 84, Series E, June 1962.

Dynamic Behavior of Underground Pipe under Excitation of Rayleigh Waves

By Shunsuke Sakurai*
Taro Kaji**

A theoretical analysis of dynamic behavior of underground pipe under excitation of Rayleigh wave is presented in this paper. A circular cylindrical pipe embeded with uniform depth in a semi-infinite isotropic elastic half space are considered and the surface wave is assumed to propagate along the pipe axis.

Although the effect of Rayleigh wave decreases rapidly with depth, its amplitude is, for simplicity, assumed to be unchanged in vertical direction and to be one at a position of the pipe axis.

The pipe can be analyzed as a forced vibration problem of beam, for which equations of motion are expressed by two independent differential equations, one is for bending and the other for longitudinal vibration. The Timoshenko-beam theory is adopted for bending vibration in this analysis. External forces against the beam are estimated by stresses acting on the surface of the pipe, which are calculated by the three dimensional wave propagation theory.

The vertical and axial displacements of the pipe axis have been derived in this paper, so that the bending moment, shearing and axial forces of the pipe will be easily obtained.

* Assistant Professor of Civil Engineering of Kobe University

** Graduate student of Kobe University