

トンネル周辺応力について

(株)熊谷組技術研究所 大塚本夫 ○上野正高

1. まえがき

トンネル周辺応力に関する研究として、弾一塑性の境界条件を、1). 内部摩擦抵抗のない場合($\phi=0$)
2). 内部摩擦抵抗のある場合、の降伏条件を考え弾一塑性領域におけるトンネル周辺応力を考察した。

2. 弾性体地山のトンネル周辺応力

トンネル周辺地山が静水圧分布と考えられる場合

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{re} &= P \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \\ \sigma_{te} &= P \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \\ \tau_{re} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{----- (1)}$$

但し σ_{re} : 半径方向応力
 σ_{te} : 接線方向応力
 τ_{re} : せん断応力
 P : 内部応力
 a : トンネル半径
 r : 動径

トンネル壁面では $2P$ なる接線応力が生じ、地山の圧縮強度が $2P$ より小さい場合にはトンネル周辺に塑性領域が形成される。

3. 塑性体地山のトンネル周辺応力

3.1 内部摩擦抵抗のない場合 ($\phi=0$)

図-1. 地山の応力分布が $\sigma_{tp} > \sigma_{rp}$ で圧縮応力の場合について取扱うと、降伏条件式は (2) 式で示される。

$$\sigma_{tp} - \sigma_{rp} = \sigma_c \text{----- (2)}$$

但し σ_{tp} : 接線方向応力
 σ_{rp} : 半径方向応力
 σ_c : 圧縮強度

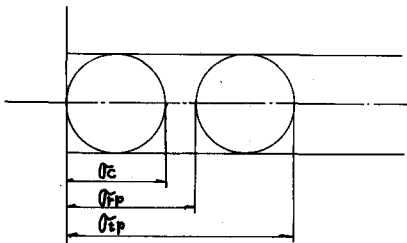


図-1. 内部摩擦抵抗のない場合の降伏条件

極座標にて塑性領域の応力状態は対称性であるから、せん断応力及び方向性には無関係である。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rp} &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \\ \sigma_{tp} &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \\ \tau_{rp} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{----- (3)}$$

応力関数 F は (4) 式を満足するものでなければならない。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}\right) = \frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} = 0 \quad (4)$$

(4) 式の解は4個の積分定数を持つものである。応力関数 F を (5) 式に定める。

$$F = Ar^2 + B \log r + Cr + D \quad (5)$$

(5) 式を微分すると、(3) 式の応力を求めることができる。

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 2Ar + B \frac{1}{r} + C \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 2A - B \frac{1}{r^2} \quad (7)$$

積分定数 A, B, C を定めるにあたり、次の条件を満足する必要がある。

- 1). $r = a$ のトンネル壁面で $\sigma_{\theta p} = \sigma_c$, $\sigma_{rp} = 0$
- 2). 塑性の降伏条件式を満足する。
- 3). 弾性体の応力式と連続し解を持つものであること。

結果として (7) 式より上記条件より積分定数 A, B を求めると接線方向応力を求めることができる。半径方向応力は得られた接線方向応力を塑性の降伏条件式 (2) 式に代入することによって求めることができる。条件 1). 2). 3). を全て満足する。結果 $A = \frac{1}{2}(p + \sigma_c)$, $B = a^2 p$ 。

塑性領域内の応力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rp} &= p \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \\ \sigma_{\theta p} &= \sigma_c + p \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(1). 式と (8) 式の連続条件式は $\sigma_{\theta p} - \sigma_{rp} = \sigma_{\theta e} - \sigma_{re}$ で示され、塑性領域の範囲を求めることができる。

$$r = a \times \sqrt{\frac{2p}{\sigma_c}} \quad (9)$$

塑性領域が生じない条件は $r = a$ を (9) 式に代入すると求めることができる。 $2p \leq \sigma_c$ となる。

3.2 内部摩擦抵抗のある場合

この場合の降伏条件式はモールの応力円で考えることができる。

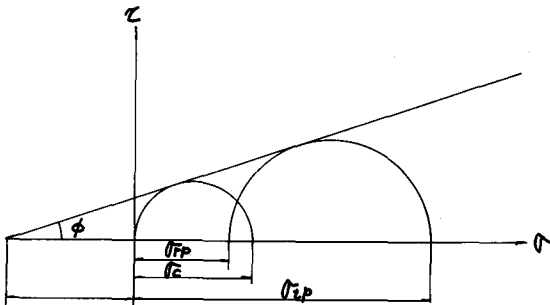


図-2. モールの応力円による主応力のつり合い。

図-2より塑性の降伏条件式を求めると、

$$\sigma_{\theta p} - \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \sigma_{r p} - \sigma_c = 0 \quad \text{--- (10)}$$

再び(7)式の積分定数を求めると、 $A = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} P + \sigma_c \right)$ 、 $B = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} P a^2$
 塑性領域内の応力及び塑性領域の範囲は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r p} &= P \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \\ \sigma_{\theta p} &= \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} P \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \sigma_c \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (11)}$$

但し

$$r = a \sqrt{\frac{ZP + P(\alpha - 1)}{\sigma_c + P(\alpha - 1)}} \quad \text{--- (12)} \quad \alpha = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}$$

塑性領域が生じない条件として、 $r = a$ を(12)式に代入すると、 $ZP \leq \sigma_c$ で内部摩擦抵抗の場合と同様な結果が得られる。さらに内部摩擦角 $\phi = 0^\circ$ の場合は(11)式にて $\sin \phi = 0$ となるから(8)式と(11)式とは同一結果になることがわかる。

4. 計算例

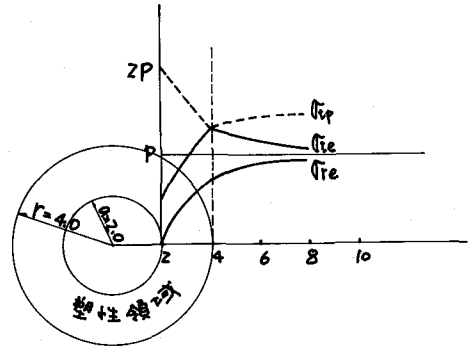
トンネル半径 $a = 2.0 \text{ m}$ 、地山の内部応力 $P = 10 \text{ kg/cm}^2$ 、地山の圧縮強度 $\sigma_c = 5 \text{ kg/cm}^2$ 、内部摩擦角 $\phi = 0^\circ$ 及び $\phi = 20^\circ$ の場合の塑性領域内の応力及び塑性領域の半径は、

4.1 内部摩擦角 $\phi = 0^\circ$ の場合

計算結果は表-1及び図-3で示される。

表-1	※ 単位 (kg/cm^2)									
	1.0a	1.25a	1.5a	1.75a	2.0a	2.5a	3.0a	3.5a	4.0a	4.5a
$\sigma_{r p}$	0	3.6	5.6	6.8	7.5	8.4	8.9	9.2	9.4	9.6
$\sigma_{\theta p}$	5.0	8.6	10.6	11.8	12.5	13.4	13.9	14.2	14.4	14.6
$\sigma_{\theta c}$	20.0	16.4	14.4	13.2	12.5	11.6	11.1	10.8	10.6	10.4

(※ 塑性領域半径 2.0a)



4.2 内部摩擦角 $\phi = 20^\circ$ の場合

表-2	※ 単位 (kg/cm^2)									
	1.0a	1.25a	1.5a	1.75a	2.0a	2.5a	3.0a	3.5a	4.0a	4.5a
$\sigma_{r p}$	0	3.6	5.6	6.8	7.5	8.4	8.9	9.2	9.4	9.6
$\sigma_{\theta p}$	5.0	12.3	16.36	18.8	20.22	22.05	23.06	23.67	24.08	24.48
$\sigma_{\theta c}$	20.4	16.4	14.4	13.2	12.5	11.6	11.1	10.8	10.6	10.4

(※ 塑性領域半径 1.405a)

図-3. $\phi = 0^\circ$ の弾-塑性領域のトンネル周辺応力

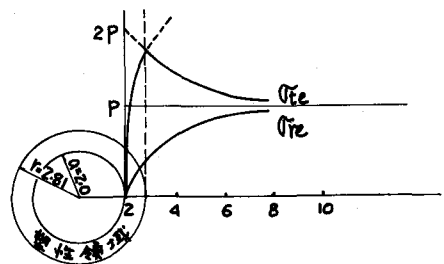


図-4. $\phi = 20^\circ$ の弾-塑性領域のトンネル周辺応力

5. 結果考察

1). 弾一塑性領域の境界条件として、内部摩擦抵抗のある場合とない場合とについて考察した。その結果、内部摩擦抵抗のある場合について $\phi = 0^\circ$ の条件を入れると内部摩擦抵抗のない場合と同一結果になる。

2). 塑性領域が生じない条件として、 $2p \leq \sigma_c$ なることがわかる。

3). 半径方向応力は弾一塑性領域において、地山を弾性体と考慮した場合の応力と共通なることがわかり、接線方向応力は弾一塑性境界にて塑性体における応力と弾性体における応力とに解を持つ。

4). 塑性領域の範囲は塑性領域と弾性領域との境界にて解を持つから求めることができる。

5). 問題を簡単にするために、地山の応力分布を静水圧分布と考えたが、静水圧分布でない場合においても弾一塑性領域におけるトンネル周辺応力について考察できる。

6). トンネル周辺応力について接線方向及び半径方向応力が共に圧縮応力で $\sigma_\theta > \sigma_r$ の条件で考察したが、引張応力が発生する場合には別途考察する必要があるが内部摩擦抵抗のいかんにかかわらずあることを明記する。

6. 結論語

トンネルの周辺応力に関する研究は数多く発表されている。地山を弾性体であるか、塑性体であるかについての判別方法としては、もともと地山は完全弾性体でないけれども、弾性体とみなしてトンネル周辺応力を考察する。弾性体とみなしたトンネル周辺応力が地山の降伏条件を越える場合に塑性体がトンネル周辺に形成される。したがって、トンネル周辺の応力状態によって、地山を弾性体であるか、塑性体であるかの判別になるものと考え。本文ではそれ等の塑性体及び弾性体におけるトンネル周辺応力を基礎的に考察した結果を記したものである。

7. 参考文献

- 1). "Statik des Tunnel - und Stollenbaues" H. Kastner P. 74 - 79

Stress Distribution Near Cylindrical Tunnel =====

Motoo Otsuka
O Masataka Ueno
Institute of Construction Technology
Kumagai Gumi Co., Ltd.

Introduction

This report lists elastic and elasto-plastic solutions for stress distribution around horizontal circular-cylindrical tunnel.

The idealized materials considered include ideally elastic materials and plastic frictionless ($\phi=0$) and frictional ($c-\phi$) materials.

1. Elastic Stress Distribution

The problem is considered a plane strain problem and the material is elastic. We now assume a horizontal rock pressure equal to the vertical rock pressure. We have the stresses given by Lamé's solution of the elastic equation.

$$\begin{aligned}\sigma_{re} &= p \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \\ \sigma_{te} &= p \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (1)$$

2. Plastic Stress Distribution, $\phi = 0$

A plastic material is considered in which yielding will occur when

$$\sigma_{tp} - \sigma_{rp} = K \quad \dots\dots\dots (2)$$

where K is shear strength or compressive strength.

For $\sigma_{tp} - \sigma_{rp} = \sigma_c$, and $2p \leq \sigma_c$, no plastic zone will develop.

For $\sigma_{tp} - \sigma_{rp} > \sigma_c$, and $2p > \sigma_c$, the stresses in the plastic zone are

$$\begin{aligned}\sigma_{rp} &= p \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \\ \sigma_{tp} &= \sigma_c + p \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (3)$$

where σ_c is compressive strength.

A plastic zone of radius r will develop

where

$$r = a \times \sqrt{\frac{2p}{\sigma_c}} \quad \dots\dots\dots (4)$$

3. Plastic Stress Distribution, $c - \phi$ Material

A material is now considered which will yield when

$$\sigma_{tp} - \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \sigma_{rp} - \sigma_c = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

For $2p \leq \sigma_c$, no plastic zone will develop.

For $2p > \sigma_c$, the stresses in the plastic zone are

$$\begin{aligned}\sigma_{rp} &= p \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \\ \sigma_{tp} &= \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} p \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \sigma_c\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (6)$$

A plastic zone of radius r is

$$r = a \times \sqrt{\frac{p(\alpha + 1)}{p(\alpha - 1) + \sigma_c}} \quad \dots\dots\dots (7)$$

where

$$\alpha = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}$$

We obtain the stresses distribution near cylindrical tunnel with plastic and elastic zone by using expression (1), (3), (6).