

単スリットをもつ脆性材料の最終強度に関する1考察

東北大学工学部 正員 佐武正雄
同上 正員 〇田野久貴

1. 緒言

岩石あるいは岩盤の強度を知るためには、節理等の割れ目がこれらの強度にどのような影響を与えるかを知ることが重要である。実際の岩盤の状態は複雑であるため、筆者達は節理をスリット状とみなした人工的な石膏モデルを用いて、一連の基礎的研究を行っている。節理をスリットと仮定しても、その長さや角度、個数、配列等の要素が強度に与える影響は複雑であり、そのためにまず単スリットの場合について充分な吟味がなされなければならない。本文は、単スリットの角度や長さが脆性供試体の強度に及ぼす影響について、最終強度の点から考察を加え、その結果を石膏を用いた実験によって検討したものである。

2. 破壊条件

2.1 破壊の定義 「破壊」あるいは「強度」という言葉が用いられる場合、普通、材料が全体破壊した時の応力、すなわち最終強度を意味していると考えられるが、必ずしも明確ではないのでここでは「破壊」を「応力の存在のもとに材料が2つ以上の部分に分離する現象」と定義する。また、以下に述べるように、静的な一軸圧縮の下ではスリットを含む材料の破壊は一瞬には生じないと考えられるので、スリット周辺の集中応力が材料固有の引張強度に達し、微視的クラックが発生する時を「破壊開始」、この微視的クラックが伝播し材料が破壊する時の作用応力を「最終強度」と呼んでおく。

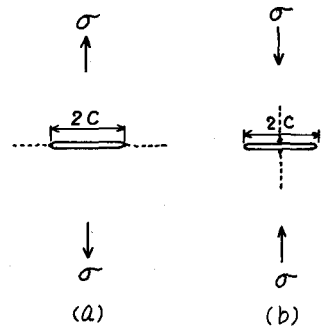


図-1 一軸引張及び一軸圧縮を受ける水平スリット

2.2 破壊の開始(応力)条件と伝播(エネルギー)条件

“破壊”という現象を以上のように解釈すると、スリットを含んだ材料の最終強度を知るためには、2つの条件を同時に考察しなければならない。すなわち、第1にスリット周辺の応力集中が材料固有の引張強度に等しくなるという応力条件(破壊開始条件)、第2に、発生した微視的クラックがある程度の大きさを持った分岐クラックまで成長し、伝播出来るほどのエネルギーを材料が持つというエネルギー条件(伝播条件)の両方の条件を満足してはじめて“破壊”が生じると考えられる。

両方の条件を同時に満足している例として、図-1(a)の水平スリットが一軸引張を受ける場合が挙げられる。これは周知の如く、Griffithがエネルギー的考察から導いた²⁾もので、θ傾斜した光沢スリット(図-2(a)参照)を含むことにより、増加する歪エネルギーU

$$U = \frac{\pi c^2 \sigma^2 \cos^2 \theta}{E} \quad (1)$$

に、 $\theta = 0^\circ$ を代入した(2)式を用いて(3)式を得ている。

※ 便宜上、低倍率の顕微鏡等でクラックであることが判別出来る程度以上の長さのものを分岐クラック、それ以下の普通確認出来ない極めて小さなものを微視的クラックと呼んでおく。

$$U_0 = \frac{\pi C^2 \sigma^2}{E} = k \sigma^2 c^2 \quad k = \frac{\pi}{E} \quad (2)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi C}} = \sqrt{\frac{2\gamma}{kC}} \quad \gamma: \text{材料固有の表面エネルギー} \quad (3)$$

外応力がこの(3)式程度になれば、スリット先端に集中する引張応力の値は材料の原子間力にほぼ等しい値になることが確かめられており、この場合、破壊開始応力と最終強度とはほぼ等しく、従って静的引張応力のもとで一瞬に破壊することがわかる。

3. 一軸圧縮における最終強度の一般的考察

一軸引張状態においては(1),(2),(3)式からわかるように、 $\theta = 0^\circ$ のときすなわち水平の時にエネルギー条件による破壊応力は最小になり、また、引張応力の集中する点のスリット上で最も曲率の大きな長軸先端に一致するため、応力条件による破壊応力も最小となる。一方、一軸圧縮下においては、上述の引張の時のように、両方の条件が一致するスリットの角度は存在しない。すなわち、図-1(b)、図-2(a)に示すように、スリットの角度が水平及び傾斜している場合はそれぞれ分岐クラック $2l$ が発生して破壊する。従って至エネルギー U は(1)式のよ

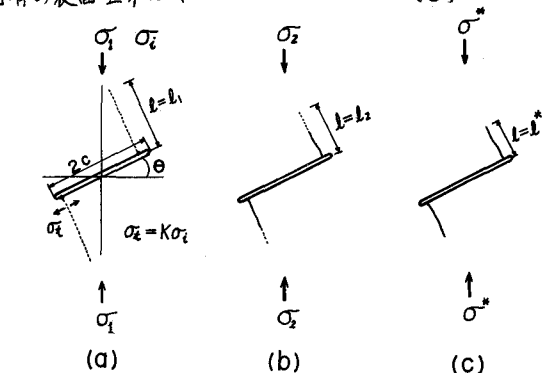


図-2 一軸圧縮下における破壊機構

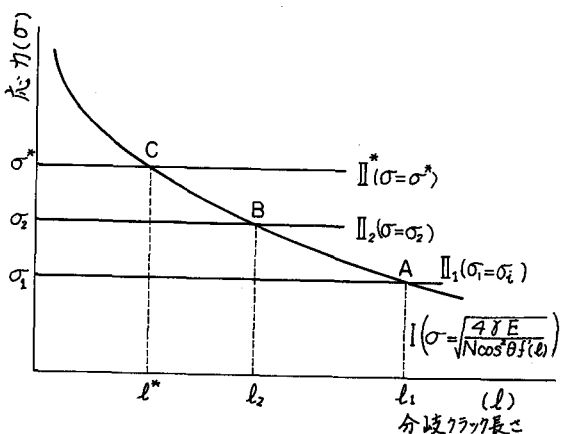


図-3 一軸圧縮下における破壊条件

うには表わされないが、この分岐クラック $2l$ を 図-3 一軸圧縮下における破壊条件 もつことにより増加する至エネルギー U はやはり先在スリット $2C$ による(1)式と同様に $\cos^2 \theta$ の函数であると考えられるので、水平($\theta = 0^\circ$)の時至エネルギーは最大、すなわち、エネルギー条件による破壊応力としては(2),(3)式の例からわかるように最小になると考えられる。

一方、応力条件による破壊応力としては、スリットをごく偏平な楕円とみなすと $\theta = 60^\circ$ 附近で最小となることから、破壊開始応力と伝播応力(最終強度)とは一致しない。従って、破壊開始後もある程度の荷重の増加に耐えられることになる。

次に、図によって説明すると以下のようになる。分岐クラックの発生したスリットにおいても、先のエネルギー的考察にもとづいた Griffith 理論²⁾と同様、荷重が増加しなくとも、この分岐クラックが連続的に伝播する限界の応力あるいは分岐クラック長さ $2l$ が存在すると思えることが出来る。エネルギーの釣合いから求めた(3)式と同様、分岐クラック長さ $2l$ に関する減少函数であると考えて、これを図-3に曲線Iで示す。これは与えられた応力のもとで破壊するために必要な長さ (l) を示す。一方応力条件は、材料及びスリットの形状が決まれば一定であるから図-3では直線IIとなる。

さて、 $\sigma_1 = \sigma_2$ の時破壊が発生したとすると、この時の必要な長さ l は図-3から $l = l_1$ である。
ところが図-2 (a) からわかるように、実際に発生している微視的クラックの長さ l と伝播に必要な分岐クラックの長さ l とは一致しない。従って、材料はより大きな応力に耐えられることになり、荷重は増加する。そして、 $\sigma = \sigma_2$ の時は $l = l_2$ ($l_2 < l_1$) となり、 $\sigma = \sigma^*$ のとき $l = l^*$ で両者は一致して材料は破壊する。

次に、具体的にこの最終強度を考察する。エネルギー条件を求めるためには、種々の分岐クラックをもったスリットによって増加する歪エネルギー $U_+ = U_+(C, l, \theta)$ の値が必要である。しかし、得られていないため、すでに計算されている十字形クラック等の場合を参考にし、また先に触れたような理由から U_+ の形を次のように仮定する。

$$U_+ = \frac{M\pi\sigma^2\cos^2\theta f(l)}{E} \quad M = M(C) \quad (4) \quad (\text{Kg/cm}^2)$$

そして、先の Griffith 理論²⁾の概念に従って次式を得る。

$$\sigma^* = \frac{4\gamma E}{\sqrt{N\pi\cos^2\theta f(l)}} \quad N = N(C) \quad (5) \quad \text{力}$$

一方、分岐クラックが $l = l^*$ になった時、増加した表面エネルギー W_s^* は次式である。

$$W_s^* = 4\gamma l^* \quad (6)$$

表面エネルギーを増加させるためになされた仕事は、クラックの運動エネルギーを無視して

$$U_+^* - U_- = W_s^* \quad (7)$$

となるから、(2), (4), (6), (7)を用いて次式を得る。

$$\left\{ \frac{M\pi\sigma^2 f(l^*)}{E} - \frac{\pi C^2 \sigma^2}{E} \right\} \cos^2\theta = 4\gamma l^* \quad \sigma_2: \text{破壊開始時の作用応力} \quad (8)$$

ここで、(5)式を用いて(7)式から σ^* を消去すると次式となる。

$$\frac{M f(l^*)}{N f(l^*)} - l^* = \frac{\pi C^2 \sigma^2 \cos^2\theta}{4\gamma E} \quad (9)$$

一方、図-2 (a) に示すように引張応力集中係数を K 、スリット周辺に集中する引張応力を σ_2 、材料固有の引張強度を σ_T とすると、 σ_2 は σ_T を超えることは出来ないと考えて、次式を得る。

$$K\sigma_2 = \sigma_T = \sigma_T \quad \therefore \sigma_2 = \sigma_T / K \quad (K < 0) \quad (10)$$

(10)式を(9)式に代入し、(9)式の左辺をごく一般的に次のように置く。

$$F(l^*) = \frac{D\pi C^2 \sigma_T^2 \cos^2\theta}{4\gamma E K^2} \quad D = \text{const.} \quad (11)$$

ここで(5)式における σ^* と l^* との関係を考慮し、(10)式を用いて σ^* をごく一般的に次のようにおく。

$$\sigma^* = \frac{4\gamma E K}{\pi C \sigma_T \cos\theta} \quad J = \text{const.} \quad (12)$$

* U_+ が C と l の積の形で表わされるか否かは不明だが、簡単にするために(4)式のように仮定した。

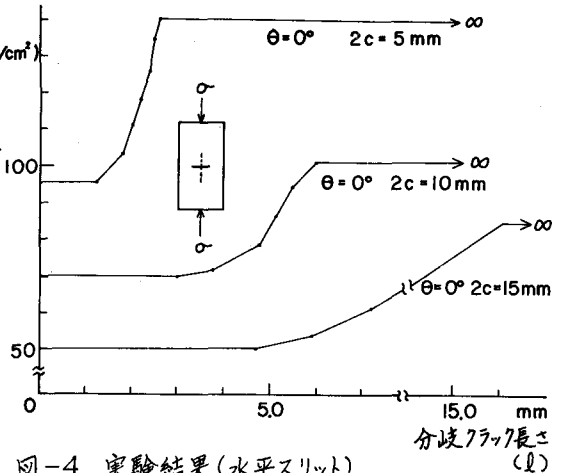


図-4 実験結果(水平スリット)

4. 実験結果及び考察

実験は、石膏を材料とする供試体(6×6×12cm)に人工的な2次元スリットを作り、スリットの長さあるいは角度を考え、低荷重速度(0.1kg/cm/s)で圧縮試験を行った。スリット周辺に発生、伸長する分岐クラック長さ(l^*)を読み取り顕微鏡(×50)で測定した。これらの実験結果を図4, 5, 6に示す。

(1)式及び(2)式を導くにあたり、 U_1 の値が不明なためかなり大胆な仮定をしたが、この実験結果はある程度考察を裏付けていると言えよう。すなわち、(1)式において、スリット長さ C が増加する程、またスリット角度が減少する程限界分岐クラック長さ(l^*)は増加することになる。また逆に(2)式においては、スリット角度が減少する程最終強度 σ^* は小さくなり、 $\theta = 0^\circ$ すなわち水平の時に最終強度は最小になることを意味している。

以上、2次元的な単一スリットを持つ脆性材料の最終強度について、エネルギー条件及び応力条件の両面から一般的考察を加え、スリットが水平な場合に材料は最弱になるという結果を得た。そして、石膏を用いた実験によっても傾向的にこの結果が確かめられた。しかし、分岐クラックを持ったスリットによる歪エネルギーの問題、あるいは、材料に完全脆性体に近いガラス等を用いた場合実験結果はどうなるか、考察の結果と実際の岩石や岩盤の破壊機構との関係はどうかといった点に多くの問題が残されている。

参考文献

- 1) たとえば、横堀 武夫：材料強度学，岩波全書，103，(1964)。
- 2) A. A. Griffith: The Phenomena of Rupture and Flow in Solids, Phil. Trans. Roy. Soc. London, vol. 221, 163, (1920)。
- 3) A.A. Griffith: The Theory of Rupture, 1st Intern. Congr. Appl. Phys., 55-63, (1924)。
- 4) M. P. Stallybrass: A pressurized Crack in the Form of a Cross, Quart. Jour. Mech. and Appl. Math., vol. 23, 35-48, (1970)。
- 5) O. L. Bowie: Analysis of an infinite Plate containing radial Cracks originating at the Boundary of an internal Circular Hole, Jour. Math. Phys., vol. 35, 60-71, (1956)。

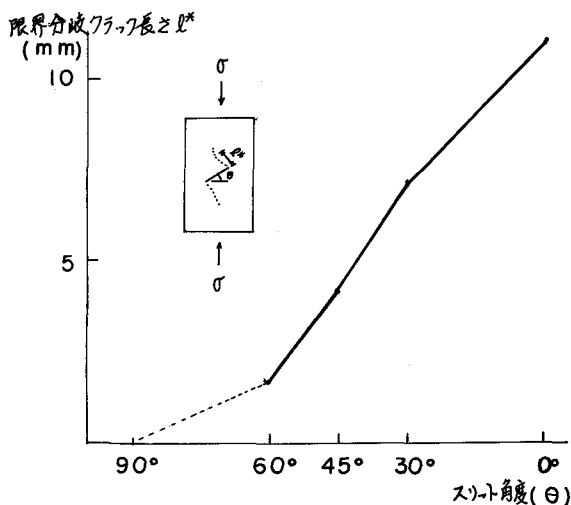


図-5 実験結果(スリット長さ と 限界クラック長さ)

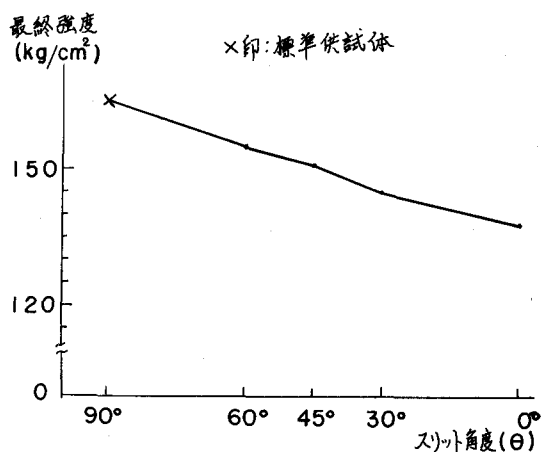


図-6 実験結果(スリット角度 と 最終強度)

A Note on the Final Strength of Brittle Materials with Single Slit

Masao Satake

Hisataka Tano

Dept. of Civil Engineering Tohoku Univ.

Abstract

This paper discusses the consideration on the relation between fracture initiation and final strength of brittle materials with single slit. In compression, it has been well known that the most severely stressed slit(crack) is inclined at 60 degrees to direct of the axis of compression. However, so called Griffith theory is based on the consideration of stress concentration around a slit and may be insufficient for the propagation energy of slit. In this paper, both stress concentration and propagation energy of slit are discussed, so that the most dangerous inclination of slit is 0 degree can be obtained and this result was confirmed from experiments of specimens by plaster.