

円形坑道周辺の応力状態に及ぼすカップルストレスの影響

京都大学 正員 〇小林昭一, 国鉄 正員 森竹淳

1. はじめに

岩盤を均質体と仮定した連続体力学理論に基づいた岩盤内応力ならびに変形解析は、従来から数多く行われてきた。しかしながら、実在の岩盤では、例えば坑道、トンネル等を例に取ってみても合るよう、その断面に比して岩塊の大きさが必要しも小さいとは言えない場合も多く、均質性の仮定に基づく解析では不十分な場合も多いと考えられる。岩塊などによるこのような局所的な非均質性をどのように評価し、公式化するかは極めて困難な問題であり、まだ統一的な取り扱いは見られないようである。

本研究は、連続体の均質性の仮定を若干緩和して、巨視的に見れば等質であるが、対象とする構造物に比して岩塊の大きさは必要しも小さくはない岩盤、換言すれば、構造物のスケールで見れば、岩塊が混入ないし結合体と考へ得る岩盤を対象として、これにカップルストレス弾性理論を適用して、円形ライニングを有する坑道周辺の応力状態を解析し、これに及ぼすカップルストレスの影響、すなわち岩塊の増減効果を検討したものである。

2. カップルストレス弾性理論の概要

Mindlin¹⁾によれば、平面ひずみ状態にあるカップルストレス弾性体の基礎式は次のように与えられる。一般の式は簡潔のためにテニサー表示を行なうことにする。

a) 変位、回転、ひずみ、曲率の関係

曲線座標系 x^α ($\alpha=1, 2$) では、ひずみ $e_{\alpha\beta}$ 、回転 ω_3 および曲率 $K_{3\alpha}$ は、変位 u_α を用いて次のように表わされる。

$$e_{\alpha\beta} = u_{(\alpha|\beta)} = \frac{1}{2}(u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) \quad (2.1)$$

$$\omega_3 = u_{[2|1]} = \frac{1}{2}(u_{2|1} - u_{1|2}) \quad (2.2)$$

$$K_{3\alpha} = \omega_{3|\alpha} \quad (2.3)$$

ここに、 $u_{\alpha|\beta}$ は u_α の x^β による共変微分を、 $u_{(\alpha|\beta)}$ および $u_{[2|1]}$ はそれぞれ $u_{\alpha|\beta}$ の対称および逆対称部を示す。

b) 構成式

構成式は次のように与えられる。

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2G} [\tau_{\alpha\beta} - \nu g_{\alpha\beta} \tau] \quad (2.4)$$

$$K_{3\alpha} = \frac{1}{4G\ell^2} K_{3\alpha} \quad (2.5)$$

ここに、 $\tau_{\alpha\beta}$ および $K_{3\alpha}$ は、それぞれ Cauchy 応力およびカップルストレスを示し、 G 、 ν 、 ℓ はそれぞれせん断弾性係数、Poisson 比および材料定数（構成粒子の大きさや幾何学的形状に関係した量）を、また $g_{\alpha\beta}$ は基本計量テンサーを表わすものとする。

c) 釣り合い式

物体力および物体カッパル力を無視すれば、釣り合い式は次のようになる。

$$\tau^{\alpha\beta}{}_{|\alpha} = 0 \quad (2.6)$$

$$\mu^{\alpha\beta}{}_{|\alpha} + \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \tau_{\alpha\gamma} = 0 \quad (2.7)$$

ここに $\varepsilon^{\beta\alpha\gamma}$ は交代テンソルである。

d) 適合条件式

適合条件式は次のように書ける。

$$\varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \varepsilon^{\beta\delta\gamma} e_{\beta\gamma}{}_{|\alpha\delta} = 0 \quad (2.8)$$

$$\varepsilon^{\beta\alpha\gamma} k_{\alpha}{}_{|\beta} = 0 \quad (2.9)$$

これらの式を力を用いて表わすと、次のようになる。

$$\varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \varepsilon^{\beta\delta\gamma} \tau_{(\alpha\beta)}{}_{|\gamma\delta} - \nu \nabla^2 \tau_{\gamma}^{\gamma} = 0 \quad (2.10)$$

$$\varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \mu_{\beta\alpha}{}_{|\gamma} = 0 \quad (2.11)$$

$$\mu_{\alpha\beta} = \varepsilon^{\beta\gamma\delta} \tau_{(\alpha\gamma)}{}_{|\beta} + \nu \varepsilon_{\beta\alpha\gamma} \tau_{\gamma}^{\gamma}{}_{|\beta} \quad (2.12)$$

ここに $\nabla^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\sqrt{g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}})$, $g = \det |g_{\alpha\beta}|$ である。これらの式のうち、2つが独立である。

e) 応力関数

応力は2つのポテンシャルを用いて

$$\tau^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \varepsilon^{\beta\delta\gamma} \phi_{|\gamma\delta} + \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \psi_{|\gamma} \quad (2.13)$$

$$\mu_{\beta\alpha} = \psi_{|\alpha} \quad (2.14)$$

と表わすことができ、釣り合い式および適合条件式を満たすためには、

$$\nabla^4 \phi = 0 \quad (2.15)$$

$$(1 - \ell^2 \nabla^2) \nabla^2 \psi = 0 \quad (2.16)$$

$$(1 - \ell^2 \nabla^2) \psi_{|\alpha} = - (2 - \nu) \ell^2 \varepsilon_{\beta\alpha\gamma} g^{\beta\gamma} \nabla^2 \phi_{|\gamma} \quad (2.17)$$

を満たさなければならないことが分る。 $\ell = 0$ とすれば、この関係は従来の弾性学(古典弾性学)の基本式と一致する。

平面ひずみ状態にあるカッパルストレス弾性問題の解は、場の方程式(2.15)と(2.17)を与えられた境界条件の下で解くことに帰着される。

3. 一様圧縮応力場内の円環円筒の応力解析

図-1のように内径 b 、外径 a の円環が無限板に埋設されており、無限遠から一様な圧縮応力 σ_0 が作用しているものを解析の対象と考える。カッパルストレスの効果は、円環とその周辺基盤との相対的な材料特性に左右されるので、円環は単独のために古典弾性学に従う等質均質体と仮定し、その周辺基盤は中央対称等質カッパルストレス理論に従うものと仮定する。また、この系は平面ひずみ状態にあるものとする。以下では、円環と基盤とを区別

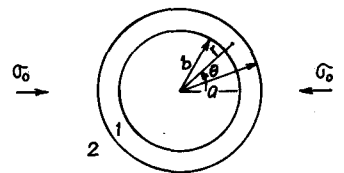


図-1

するため、それぞれに関する諸量にインデックス 1 および 2 をつけることにする。

a) 応力関数

対称条件を満す応力関数として、 ϕ_1 は次のように与えられる。

$$\phi_1 = A_0 r^2 + B_0 \ln r + (A_1 r^2 + B_1 r^2 + C_1 r^4 + D_1) \cos 2\theta \quad (3.1)$$

また、無限遠での条件

$$(\sigma_r)_2 = \frac{\sigma_0}{2}(1 + \cos 2\theta), \quad (\tau_{r\theta})_2 = -\frac{\sigma_0}{2} \sin 2\theta, \quad (3.2)$$

および対称性の条件を考えると、 ϕ_2 および ψ_2 は次のように与えられる。

$$\phi_2 = \frac{\sigma_0}{4} r^2 (1 - \cos 2\theta) + A_2 \ln r + (B_2 r^2 + C_2) \cos 2\theta \quad (3.3)$$

$$\psi_2 = [b_2 r^2 + c_2 K_2(r/b_2)] \sin 2\theta \quad (3.4)$$

すなわち、 $K_2(r/b_2)$ は 2 次の円柱座標ベッセル関数である。

b) 応力成分、変位成分

応力成分および変位成分は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r)_1 &= 2A_0 + B_0 r^2 + (-2A_1 - 6B_1 r^4 - 4D_1 r^2) \cos 2\theta \\ (\sigma_\theta)_1 &= 2A_0 - B_0 r^2 + (2A_1 + 6B_1 r^4 + 12C_1 r^2) \cos 2\theta \\ (\tau_{r\theta})_1 &= (\tau_{\theta r})_1 = 2(A_1 - 3B_1 r^4) + 3C_1 r^2 - D_1 r^2 \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

$$\left. \begin{aligned} E_1(u_r)_1 &= 2A_0(1-\nu_1)r - B_0(1+\nu_1)r^{-1} + \{2A_1(1+\nu_1)r + 2B_1(1+\nu_1)r^3 - 4C_1\nu_1 r^3 + 4D_1 r^{-1}\} \cos 2\theta \\ E_1(u_\theta)_1 &= \{2A_1(1+\nu_1)r + 2B_1(1+\nu_1)r^3 + 2(3+\nu_1)C_1 r^3 + 2D_1(\nu_1-1)r^{-1}\} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r)_2 &= \sigma_0(1 + \cos 2\theta)/2 + A_2 r^2 - (6B_2 r^4 + 4C_2 r^2 - 6b_2 r^4) \cos 2\theta \\ &\quad + 2c_2 b_2^{-1} r^{-1} [3b_2 r^{-1} K_0(r/b_2) + (1+6b_2^2 r^2) K_1(r/b_2)] \cos 2\theta \\ (\sigma_\theta)_2 &= \sigma_0(1 - \cos 2\theta)/2 - A_2 r^2 + (6B_2 r^4 - 6b_2 r^4) \cos 2\theta \\ &\quad + 2c_2 b_2^{-1} r^{-1} [3b_2 r^{-1} K_0(r/b_2) + (1+6b_2^2 r^2) K_1(r/b_2)] \cos 2\theta \\ (\tau_{r\theta})_2 &= -(\sigma_0/2 + 6B_2 r^4 + 2C_2 r^2 - 6b_2 r^4) \sin 2\theta \\ &\quad + c_2 b_2^{-1} r^{-1} [6b_2 r^{-1} K_0(r/b_2) + (1+12b_2^2 r^2) K_1(r/b_2)] \sin 2\theta \\ (\tau_{\theta r})_2 &= -(\sigma_0/2 + 6B_2 r^4 + 2C_2 r^2 - 6b_2 r^4) \sin 2\theta \\ &\quad + c_2 b_2^{-2} [(1+6b_2^2 r^2) K_0(r/b_2) + (3b_2 r^{-1} + 12b_2^2 r^3) K_1(r/b_2)] \sin 2\theta \\ (u_r)_2 &= \{ -2b_2 r^3 - c_2 b_2^{-1} [2b_2 r^{-1} K_0(r/b_2) + (1+4b_2^2 r^2) K_1(r/b_2)] \} \sin 2\theta \\ (u_\theta)_2 &= \{ 2b_2 r^3 + 2c_2 r^{-1} [K_0(r/b_2) + 2b_2 r^{-1} K_1(r/b_2)] \} \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

$$\left. \begin{aligned} 2G_2(u_r)_2 &= \sigma_0 r(1-2\nu_2)/2 - A_2 r^3 + 2r^3 \{ \sigma_0 r^4/4 + B_2 - b_2 + 2C_2 r^2(1-\nu_2) - c_2 r^2 K_2(r/b_2) \} \\ &\quad \times \cos 2\theta \\ 2G_2(u_\theta)_2 &= r^3 \{ -\sigma_0 r/2 + 2B_2 - 2b_2 - 2C_2 r^2(1-2\nu_2) - c_2 r^2 [\frac{1}{b_2} K_1(r/b_2) + 2K_2(r/b_2)] \} \\ &\quad \times \sin 2\theta \\ 2G_2(w_3)_2 &= r^2 b_2^2/2 \{ b_2 + c_2 r^2 K_2(r/b_2) \} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

c) 境界条件

境界条件は $r=a$ で、

$$r=a \text{ で、 } (\sigma_r)_1 = (\sigma_r)_2, \quad (\tau_{r\theta})_1 = (\tau_{r\theta})_2, \quad (u_r)_2 = 0, \quad (u_r)_1 = (u_r)_2, \quad (u_\theta)_1 = (u_\theta)_2$$

$$r=b \text{ で、 } (\sigma_r)_1 = 0, \quad (\tau_{r\theta})_1 = 0$$

以上の境界条件を式(2.17)に代入し、 $b_2 = \delta(1-\nu) b^2 C_2$ とおき、11個の未知係数に関する

11元連立方程式を得る。これを解いて、応力、変位は容易に求められる。なお、 $u_2=0$ とすれば、古典弾性学の解となることは言うまでもない。また、ライニングにもカップルストレス理論を適用する場合には、以上の取り扱いに更に、

$$u_1 = (a_1 r^2 + b_1 r^{-2}) \sin 2\theta + \{d_1 I_2(r/l_1) + e_2 K_2(r/l_1)\} \sin 2\theta$$

$$b_1 = 8(1-\nu_1) l_1^2 C, \quad a_1 = 24(1-\nu_1) l_1^2 A_1$$

を追加すればよい。

4. 解析結果と考察

円環およびその周辺基盤の応力ならびに変形状態は、円環と周辺基盤の弾性係数、Poisson比ならびにカップルストレスに因する材料定数等の諸材料定数の比および円環の剛性、すなわち b/a に影響される。ここでは、特にカップルストレスの効果を注目して解析する。円環境界上での応力集中係数の一例を図-2に示す。この解析では、Poisson比 $\nu_1 = \nu_2 = 0.2$ とした。

解析結果から次のことが明らかとなった。

i) 古典弾性学 (i.e. $l_2 = 0$) に於ては、 E_2/E_1 が小さい程、また b/a が大きい程応力集中は大きくなる。

ii) カップルストレス弾性論では、応力集中は E_2/E_1 , b/a , ν_1 および l_2 によって大きく左右される。 $\nu_1/\nu_2 = 1$, $\nu_2 = 0.2$ という例に因しては、 $b/a > 0.7$ では E_2/E_1 比に反比例する l_2 の増加とともに応力集中は減少する。この傾向は b/a が大きい程顕著である。 $b/a \approx 0.7$ では E_2/E_1 比および l_2 に反比例する応力集中はほとんど一定である。また、 $b/a < 0.7$ では、 $E_2/E_1 < 0.5$ になると l_2 の増大と共に応力集中は大きくなる。以上の例から分るように、カップルストレスを考慮すれば、古典弾性学によるもの相違異なってくる。その他の例は当日発表する。

参考文献

1) R. D. Mindlin, *Exp. Mech.*, 3, 1~7 (1963)

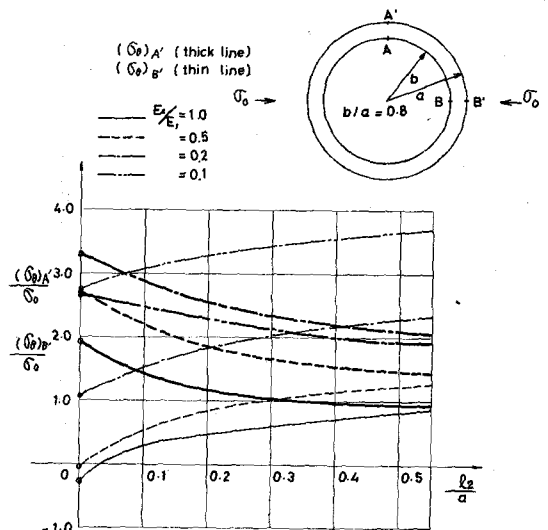
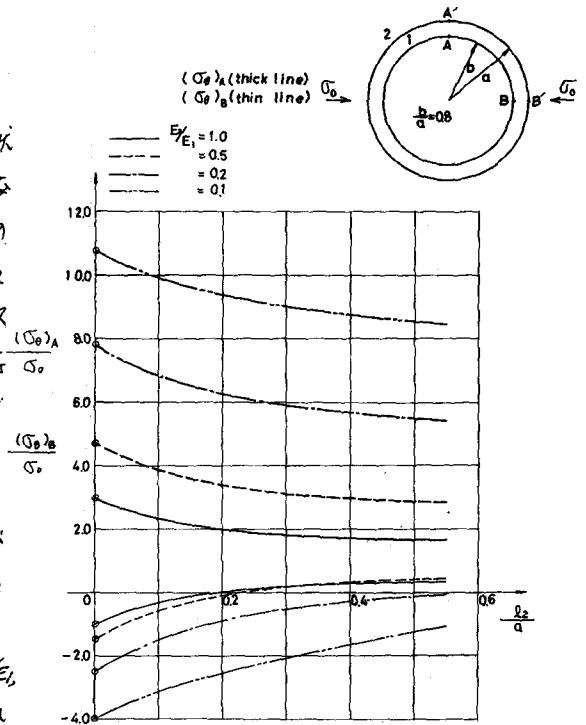


図-2

Effects of Couple Stresses on Stress Distributions
around a Lined Circular Tunnel

Shoichi Kobayashi
Dept. of Civil Eng., Kyoto Univ.
Sunao Moritake
Japanese National Railways

Although plenty of analytical works have been made in the stress distributions around underground structures, the results sometimes may lead to invalid interpretation in evaluating the real stress distributions. The main reason of such invalid interpretation of the stress distributions is due to the analytical assumption of homogeneity which does not account for the comparable size of constituents of real rock masses with that of underground structures.

It is very difficult to take the size effect of constituents, i. e. local inhomogeneity, into considerations. One reasonable approach, although not sufficient enough at present, may be to formulate the rock masses by the theory of multiphase materials. The effects of local inhomogeneity may be interpreted to some extent by the couple stress theory, the simplest one for multiphase materials.

In the present paper, the effects of local inhomogeneity, i. e. the effects of the couple stresses, of surrounding rock masses on underground structures are evaluated by use of the couple stress theory. Stresses around a lined circular tunnel are affected by the internal length of constituents of rock masses as well as the ratios of Young's modulus and Poisson's ratio of lining to the surrounding rock masses and the thickness of lining. The investigations are extended into the variations of stress concentration factors at the outer and inner edges of lining with the ratio of the internal length to the radius of the tunnel for various ratios of Young's modulus of surrounding rock masses to the lining.