

〔特別講演〕 粒 状 体 の 力 学

東京大学工学部 最 上 武 雄

1. はじめに

岩盤に関する力学は多くの人々の注目する所となり、発展の途をたどっている。体系としては、未だ完成していないので多くの方向からのアプローチが試みられている。そのため多少の混乱はまぬがれぬであろうが、これは已むを得ない。土質力学の一小部門の話も若干参考になるかも知れないと思い、今回の御委嘱を引き受けたのである。私自身は土の中の砂や礫が外力に依ってどのように変形し破壊に至るかと言うことを研究している。変形問題はこれからで現在やっと破壊についての目標がいくらかできた段階である。工学は大まかに分けると、現象について本質を掴もうというどちらかと云えば理学に近い部分と、それに基いて実用的問題の処理法を検討しようとする二つがある。土の破壊の研究は、これも大まかな話だが、最近まで後の方向がとられて来たように思われる。

今から殆ど10年程前から第一の方向で変形問題と共に研究しようとする動きが出て来ているが、未だ研究が初まったと言う程度の段階であると思う、本文では初めに他の著者の研究の概略を述べ、次いで著者自身のものを説明する、ここでは岩盤力学の方々の集まりなので、方法論に重点を置き、土質力学的な意味や応用についての話は必要最小限に止める。なお粒状体と云う聞き馴れぬ言葉を使うが、これは砂や礫などのように粒のあつまりと云う意味で、最近化学工学の一分野となった粉体工学と紛れないために、著者が捏造した言葉である。

2. 強度理論について

物体が外力を受けどのようにして破壊するかについての研究は非常に古くからある、現在言う所の材料力学は、古くはStrength of Materialsの直訳語である材料強弱学と呼ばれていた。従ってこの学問全体が強度理論と云えないこともないかも知れない、しかし暫く前まで、今日でもそうかも知れないが、強度理論とは降伏理論、特に鋼の降伏理論を云っていたようである。土の場合には降伏と砂壤とは混同があり言葉の上でも扱い方でも明確に分けられていない。

鋼の場合で降伏前の応力分布を強く意識しているのは中西理論が唯一ではなからうか、他のすべての理論では断面での一点で降伏条件が満されれば、少くともその点では降伏が起ると考えている。ここで降伏条件と云うのは主応力3つが異るとは云えそれぞれが一様となるような試験によって求められた降伏条件と云う意味である。土は鋼よりも性質が複雑であるが、一応一点理論の立場で破壊時の間げき比とある意味での摩擦角に依りその強度がきまると云うこと(Hvorslevの規準)がわかっている。しかし一点降伏理論を全面についての理論まで持って行かなければ最終目的は達せられない。鋼などは降伏点以下では弾性理論が適用できることがわかっている。従って降伏前の各部の応力などが計算できる。つまり、最終目的達成への道は開かれている、しかし土では極く特別な場合、例えば地表面に荷重が加わったときの地中の応力の他には外力の下で土中に生ずる応力を求める方法が確立していない。しかも現在あげた例にしても、水平面上の垂直応力以外の応力成分が測定されたと云うことを聞いていない。最近、有限要素法を用いて地盤の力学を研究することが

試みられている。現在は残念ながら、まだ試みの段階であると云わざるを得ない、甚だ有望であると思うが、この方法が確立されるのは将来の問題である。

以上の考えから土の変形についての研究が破壊理論に対しても重要であることは明らかであろう。

3. 土の変形理論

土の変形についての研究が理論的に重要なことは既に述べた。実際的にこれが大切なものであることは云うをまたない。処が、残念なことであるが、多くの人々の努力にも拘らず、まだ自然は人間に微笑を送っていない。

現在数少ない変形理論の若干を紹介しよう。

(i) Rowe の stress-Dilatancy theory ^{1), 2)}

まず等しい大いさの球の規則的なあつまりについて力学的考察をした上、これを一般化し、粒状体の変形する場合には

$$\frac{\text{粒状体の変形するときエネルギーを dissipate する割合}}{\text{粒状体に外から加えられるエネルギーの増分}}$$

なる比が最小になる、つまり上の比が最小となるように変形が起ると云うものである。

(ii) Roscoe, Schofield, Wroth その他による理論 ³⁾

Roscoeを中心としたCambridge大学の一派が研究したものである。多くの人のせん断に関する実験結果を検討して、土が降伏する場合、平均圧力(p)、間げき比(e)、偏差応力(q)の間にある関係があることを見出した。これらの三つのものを座標軸とした空間を考えたとき、この関係は一つの空間曲線となるが、これを限界状態線(Critical State line)と名付けた。エネルギー逸散の割合が $P|\dot{e}|$ に比例する、 $\dot{e}$ は偏差ひずみ、Mは常数である。限界状態線の上では V を容積、 r 、 λ を常数とし $q = Mp$ 、 $V = r - \lambda \ln p$ であることを仮定する。またDruckerによる安定、不安定の考え^{4), 5)}を利用する。砂、礫のようなものに限って述べると、このような材料について以上諸仮定が適用出来るとしその上剛塑性の性質を導入して議論を進めた、その理論をGranta Gravel理論と云うこのようにして導き出された諸関係が現実の砂礫の性質と一致することは望めないことは初めから明らかである。一つには剛塑性と云う性質であるが全領域が塑性になつていないとすれば変形は全く生じないのである。このようなことは事重に合わぬ。

塑性状態になった処から変形が生じ、それが重ね合わされて全体の変形を生ずると考えざるを得ない、それならばどこから塑性領域に入るのが分からなければならない。これらのことは現在全く不明のことに属する。そうは云うものの彼等の理論はone-Point theoryと見る限り、可成りの程度実験と理論との一致を得るのに成功している。Rowe理論と比べて、塑性学その他の領域での理論を適当に採用しているので、Roweの理論より構成的には強固であると思われる。

4. 村山の理論 ^{6), 7)}

粒状体は粒から出来ており、気体、液体、固体とは明瞭に異なる力学的性質を持っているので、その力学を建設することは甚だ興味深いものである。粒から出来ているとしてその力学を考えて行く場合、以って範とするものとしてはガスの運動論がある。つまり古典的な統計力学である、そうかと云ってこれが直接応用出来ると云うのは当然間違いだが、考えの筋としての話である。ガス運動

論には各粒子を大いさ等しい完全弾性体の球と仮定し、それに衝突の法則を適用して議論を進める方法と相空間を考えて議論を進める方法とがある。前者に対応するのが村山教授の理論である。村山の場合に衝突の法則に当るものは、粒子どうしの接触面の傾き、粒子間に働く力の方向と接触面との関係をあらわす分布関数である。これを仮定して議論を進めて応力ひずみの関係、ダイレタンシーなどを論じている。

5. 著者の理論, I

著者は初め粒状体のエントロピーが状態の確率の対数に比例すると云うことを仮定して論を進めたのであるが、^{8)~16)}その後考える所があり、現在では根本的には変わらないのだが、以下に述べるように理論を改良した。^{17), 18)}

容積一定の一つの箱を考える。この箱の中にNケの粒子(必ずしも大いさ等しくなくて良いし、球形でなくても良い)を入れよう。そのときの各粒子の位置、向きなど箱の中の粒子の状態を示すに足るものを調べる。それらをひとまとめとしたものを状態1と名付ける。この作業が終わったら粒子を全部とり出して再び全部をその箱の中に入れ同様に状態2を得る、このような操作を繰返えして行くと、その箱にそれらのNケの粒子を入れる場合に物理的に生じ得るすべての状態が得られるだろう、その数は非常に大きいであろうが有限である。この数をZであらわそう、この場合この箱の中にNケの粒子を入れる仕方の“数学的”な数Z'とZとは区別すべきであろう、数学的には空中に粒子が浮いているような場合も考えることが出来るが物理的にそのようなことは不可能だからである、つまり $Z' \geq Z$ である。

処で上に述べたような操作をZに比べて非常に多い回数、例えば 10^{100} Z回とか行つたとすると、その中にあらわれるであろうそれぞれの状態の数から、それぞれの状態に対する確率 $P(1), P(2), \dots, P(Z)$ が求められるであろう。Z-Z'ケの数学的には生じ得ても物理的には生じ得ないような状態を生かし、それらの確率を0として考えることも差しつかえない。

また、これらの多くの状態ではすべて一定容積の箱の中にNケの粒子(その全容積は一定)が入っているのだから間げき比は一定で共通して居り粒子の入り方、つまり間げき比の分布が異っているだけであることに注目する必要がある。 $P(1), P(2), \dots, P(Z)$ の値については我々は何も知らない、ただこのようなものが前述の操作を行なえば求められるだろうと云うことを知っているだけである。

このようにとき、この対象について我々の知識のあいまいさを量的にあらわすものとして、情報理論ではエントロピーSが次のように定義される。

$$S = -K_1 \sum_{i=1}^Z P(i) \ln P(i) \quad (1)$$

これは熱力学的エントロピーに比例するとして良い。さて、ここで粒状体が変形して行く場合の粒子の動きについての観察事実および考察事実を述べねばならない。

モデル試験についての観察によれば、粒状体に力を加え変形が起るとき、すべての粒子が周囲の粒子に相対的に変位を生ずるのでなく、いくつかの粒子は群となり、その群内での粒子の相対的変位は生ぜず、いわば剛体の如く運動する。群と群との境界には比較的相対的に動き易い粒子が層状にあり、これがせん断層を形成し、そこでの滑りが粒状体全体の変形に寄与するのである。従来、等球

のあつまりを基として粒状体の力学を考えている著者の総てが、あるいは明らかに（例えば Horne, M, R,²⁾に引用），あるいは暗黙の中にこの見解を認めている。このような粒子の配列状態も前に挙げたZケの状態の中に入っている，剛体的な群の中の粒子が剛体的でなく入っているような状態の確率は0となる。このようにして滑り層が粒状体の中で明確に形成されるにつれて， $P(1), P(2), \dots, P(Z)$ の中のいくつかは次第に0になって行く，従って適当に番号の順序を変えれば，

$$\begin{aligned} P(1) \neq 0, \quad P(2) \neq 0, \quad \dots, \quad P(m) \neq 0 \\ P(m+1) = P(m+2) = \dots = P(Z) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

となるから

$$S = -K_1 \sum_{i=1}^m P(i) \ln P(i) \quad (3)$$

と書けるようになる。剛体的な群の境界に出来るせん断層の中の粒子は容易に相対運動をする，これらの粒子の位置がZの0でない確率に貢献しているのである。このような粒子の相対運動が容易だと云うことを言いかえれば，せん断層内の粒子の並び方それぞれの確率は少なくとも総べて等しいと云える，従ってこの段階では

$$\begin{aligned} P(1) = P(2) = \dots = P(m) \neq 0 \\ P(m+1) = P(m+2) = \dots = P(Z) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

と考えると良い，従ってエントロピーSは

$$S = -K_2 \ln W \quad (5)$$

の形となる， $P(1) = P(2) = \dots = P(m)$ であったとしてもmの値がいくらであるかはわからない，一応曲がりなりに計算出来るのはmでもZでもなくZ'である。処で $m = Z' - \mu$ とすると

$$\begin{aligned} S' = -K_2 \ln \left(\frac{1}{Z'} \right) \quad \text{として} \quad S - S' = K_2 \left(\ln \frac{1}{Z' - \mu} - \ln \frac{1}{Z'} \right) \\ = -K_2 \ln \left(1 - \frac{\mu}{Z'} \right) \end{aligned}$$

であるから

$$S = S' - K_2 \ln \left(1 - \frac{\mu}{Z'} \right) \quad (6)$$

である。後に必要となるのはSではなくて ΔS である。先きに述べたように(4)の条件が満されるような状態に粒状体があったとして，それからは一応定常状態に近いと考えると良いから

$$\Delta [K \ln \left(1 - \frac{\mu}{Z'} \right)] \div 0 \quad (7)$$

と仮定しても，それ程悪くはないと思う，そうだとすれば

$$\Delta S \div \Delta S' \quad (8)$$

としても差し付かえあるまい。

6. 著者の理論，Ⅱ

(i) 各粒子の形は等しくなくても良いが，それぞれの粒子の体積は等しい場合，^{8)~11)} 粒状体をいくつかの体積要素に分けて，それぞれの体積要素に於ける間げき比を求めることはできる。間げき比には大小様々のものがあり，また等しいものもあろう，等しい間げき比を持つ要素は一つにまとめて考える，そうすると次のような一種の行列が得られる。

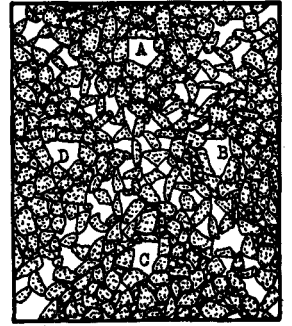


図 - 1

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ V_1 & V_2 & \cdots & V_n \\ N_1 & N_2 & \cdots & N_n \end{pmatrix} \quad (9)$$

但し、 $e_1, e_2, \dots, e_n$ は上のようにして求めた間げき比で大きい順序に並べたものである。

V_i は e_i なる間げき比を持つ要素の容積を加えた全部の容積であり、 N_i は間げき比 e_i を持つ要素に含まれる粒子の全容積を粒子数であらわしたものである。粒状体の全容積を V 、粒子の全数を N 、各粒子の容積を V_0 とすると

$$\left. \begin{aligned} V_1 + V_2 + \cdots + V_n &= V \\ N_1 + N_2 + \cdots + N_n &= N \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} N_i V_0 (1 + e_i) &= V_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \bar{e} &= \sum e_i / n, \quad e_i = \bar{e} + \epsilon_i \end{aligned} \quad (11)$$

とすると $\sum \epsilon_i = 0$

である、 $s = \sum \epsilon_i^2 / n$ (12)

とおく、また

$$\sum \epsilon_i^{2k} = 0, \quad \sum N_i \epsilon_i^{2k-1} = 0, \quad k \geq 2 \quad (13)$$

と仮定する。この仮定が許し得るとの実験的根拠は¹³⁾にある。(9)は粒状体内での間げき比の分布を示すマトリックスである。

$V, N, \bar{e}, S$ を一定にしながら(9)のような間げき比分布を与える数 Z' を数学的に計算すると、

$$\ln Z' = A + N \left[(1 + \bar{e}) \ln(1 + \bar{e}) - \bar{e} \ln \bar{e} - \frac{s}{2\bar{e}(1 + \bar{e})} \right] \quad (14)$$

となる、この Z' は前に述べた Z に当る

(II) 各粒子の大きさが必ずしも等しくない場合¹²⁾

v_1 の容積を持つ粒子が N_1 、 v_2 の容積を持つ粒子が N_2 、 $\dots$ v_m の容積を持つ粒子が N_m あるときは

$$k_j = N_j V_j / (N_1 V_1) \quad \text{とおき} \quad K_1 = \sum k_j \quad \text{とすると}$$

$$\ln Z' \sim N_1 \cdot K_1 \left[(1 + \bar{e}) \ln(1 + \bar{e}) - \bar{e} \ln \bar{e} - \frac{s}{\bar{e}(1 + \bar{e})} \right] \quad (15)$$

のようになることが示し得る。(14)、(15)とを比較すると同じ形になっていることに注目すると、エントロピーは各粒子の大きさが等しくても等しくなくても同型となるのである。

(III) エネルギー逸散

粒状体に働く外力は粒状体を変形させる。この変形には外力を除けば元に戻る部分と永久変位となって元に戻らぬ部分とがある。前者は外力によって行なわれる仕事の中、体内の内部エネルギーとなり力がとり去られれば外に対して仕事をする部分であり、後者は粒子どうしのこすれ合いその他で力学的エネルギーが熱エネルギーとなり再び力学的エネルギーとして取り返えすことが出来なくなるもので、普通このエネルギーは逸散と云われているものである。見方を変えれば、このエネルギーは体系のエントロピーの変化(生成: entropy production)を生じるとも云える。粒状体の変形は

既に述べたように、進んだ段階では、剛体的になった部分間の滑りによって生ずるのであり、この段階の変形は殆ど不可逆的と見て良いから、可成り良い近似で、(8)を考慮に入れて

$$\text{外力の仕事の増分} = T \Delta S$$

$$= K \Delta \ln Z' \quad (16)$$

とすることが出来る、外力の仕事増分 ΔA は

$$\Delta A = -\frac{P}{1+e} \Delta e + \frac{2}{3} \tau_1 \Delta r_1 + \frac{2}{3} \tau_2 \Delta r_2 + \frac{2}{3} \tau_3 \Delta r_3 \quad (17)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} &= P, \quad \epsilon_2 - \epsilon_3 = -\Delta r_1, \quad \epsilon_3 - \epsilon_1 = -\Delta r_2, \quad \epsilon_1 - \epsilon_2 = -\Delta r_3 \\ \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} &= \tau_1, \quad \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \tau_2, \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{3} = \tau_3 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

である、軸対称の場合には

$$\Delta A = -\frac{P}{1+e} \Delta e + \frac{2(\sigma_1 - \sigma_3)}{3} \Delta r_3 \quad (19)$$

平面ひずみならば

$$\Delta A = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2(1+e)} \Delta e + \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \Delta r_3 \quad (20)$$

となる。

(iv) 変数の変換について^{8), 9)}

(16)式の左辺は(17), (19), (20)で見るように平均圧力、せん断応力と間げき比、せん断ひずみの増分を含んでいる。右辺の方は(14), (15)で明らかのように間げき比とその散りをあらわす s を含んでいる、従って、変数 e , s を何らかの方法で e , r に変換することを考えないと(19), (20)が有効に使えない。

s は e , r の関数であろうが

$$s = s(e, r) \quad (21)$$

の関数の型が如何なるものであるかを物理的に推論することは非常に難かしい、そこで半ば直観的

に

$$\begin{aligned} S &= K \ln Z' \\ &= KF(e - kr) \end{aligned} \quad (22)$$

であると仮定する。半ばと云う意味は S は塑性ポテンシャルの性質を持ち且つ降伏時には p , τ は比例関係にあることが頭にあるからである。

F の関数型をきめるには r を降伏が初まった処から測ることとすれば、そこでは $r = 0$ であるが、そのとき $s = s_0$ であると云うモデル実験からの結果がある¹³⁾ ことを利用する、そのようにして、常数を少し調整して

$$S = K \left[A + (1+e-kr) \ln(1+e-kr) - (e-kr) \ln(e-kr) - \frac{1}{2} \frac{s_0}{(e-kr)(1+e-kr)} \right] \quad (23)$$

と書くことが出来、(21)の関係として $kr \ll e$ とすると

$$s - s_0 = 2kr_e(1+e) \ln \frac{1+e}{e} \quad (24)$$

が求められる。

(v) 内部摩擦角(ϕ)と間げき比との関係¹⁰⁾

説明は例として三軸試験の場合を採る。

この場合には

$$dA = -\frac{p}{1+e} de + \frac{2(\sigma_1 - \sigma_3)}{3} d\gamma_3 \quad (19)$$

となる。(23)より

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial e} &= K \left[\ln \frac{1+e-k\gamma}{e-k\gamma} + \frac{s_0}{2} \frac{1+2e-2k\gamma}{(e-k\gamma)^2 (1+e-k\gamma)^2} \right] \\ \frac{\partial S}{\partial \gamma} &= -Kk \left[\ln \frac{1+e-k\gamma}{e-k\gamma} + \frac{s_0}{2} \frac{1+2e-2k\gamma}{(e-k\gamma)^2 (1+e-k\gamma)^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

であるから、(16), (19)より

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3} = -K(1+e)w \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{3} &= -Kk'w \quad k' = k/2 \\ \text{但し } w &= \ln \frac{1+e}{e} + \frac{s_0}{2} \frac{1+2e}{e^2(1+e)^2} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\therefore \sin \phi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} = \frac{3k'}{2(1+e)+k'} \quad (27)$$

が求められる。他の場合、例えば平面ひずみ、平面応力(この場合は実用上は大した意味もないが)については次の関係式が求められる。

$$\left. \begin{aligned} \sin \phi &= \frac{k}{1+e} \quad (\text{平面ひずみ}) \\ \sin \phi &= \frac{k}{1+e}, \quad (\text{平面応力}) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

これらの式の中での常数は同じ字 k を用いて書いてあるが、これらが総べて等しいと云う意味ではない。これらの式の適合性を、砂やレキについての多くのせん試験結果に依って調べて見るに、適合性は甚だ良い。^{10), 19), 21)}

(vi) 常数 k について

k の値は(24)によって、間げき比の散らばりをあらわす S とせん断ひずみ r 、間げき比 e とを結び付ける常数であるが、実験的検討の結果次のようなことが云えるようである。

a. 粒の表面が粗い程、 k の値は大きい¹⁴⁾

- b. 粒の表面が粗い程，滑り層の厚さは大きい²²⁾
- c. k の値は粒子の材質によって変るらしい¹⁹⁾
- d. 粒子が破碎し易い程， k の値は小さいようである²²⁾
- e. k の値と材料の均等係数の対数とは直線関係にある^{19), 20), 21)}
- (vii) k と材料の均等係数との関係^{19), 20), 21)}

前節 e であげたことであるが少し説明を加える。図-2 は，浅尾格，Bishop，吉越，運輸省港湾研究所などで得られた，砂，レキについてのせん断試験の結果に基いて，それら材料の均等係数の対数と k とを図示したもので，点は明瞭に殆ど平行な二本の直線 A，B の上に良く乗っている。中に二つ程，これらの直線から可成り外れた処にある点があるが，これは実験操作の不備によることがはっきりしており，それがなければ共に直線 A の上に乗っていたであろうと推定されるのである。直線 A 上に点を持つ材料は人工的に作られたもの，直線 B 上に点を持つ材料が自然材料であるのも特徴的である。

粒子の材質，形，破碎し易さなどが，この図示にどのように影響するかは今のところ，わかっていない。このような直線関係が正しいとすると，与えられた材料のフルイ分析によって均等係数を求めると，それから k の値が求められ，内部摩擦角の大体の値を推定することが出来るであろう。

(viii) Roscoe の理論との関係¹⁵⁾

Roscoe 理論では降伏時の (p, τ, e) が p, τ, e を三軸とする空間での一つの曲線（限界状態線）上に乗ると云う実験事実が重要な一根據となっている。

式(2)は降伏時の (p, τ, e, s_0) の関係をあらわす方程式であるから，例えば，式(2)の第一式は限界状態線の $\tau = 0$ 平面への投影，第二式は同じく $p = 0$

平面への投影となっている筈である。これらの二者から $e = 0$ 平面への投影も求められる。この作業を実施して見ると Roscoe が，実験結果を整理したものと酷似している。著者の理論は今迄述べて来たようなものだから，ぴったり良く合うと云うことを期待することは無理だが，酷似していると云うことは甚だ興味深いことと云わねばならない。

また，著者の理論では(iv)で述べたような変数変換の仮定がおもで，そのときにでてくる k と云う値が理論の応用に当って大切な意味を持ってくるものである。式(2)であらわされる変換はそれから導かれる結果を実験値によって検証し見当外れのものではなさそうであることがわかっている，しかし限界状態では $q = Mp$ と云う関係が成立つことが実験的にわかっている（Roscoe 理論参照）ので，こ

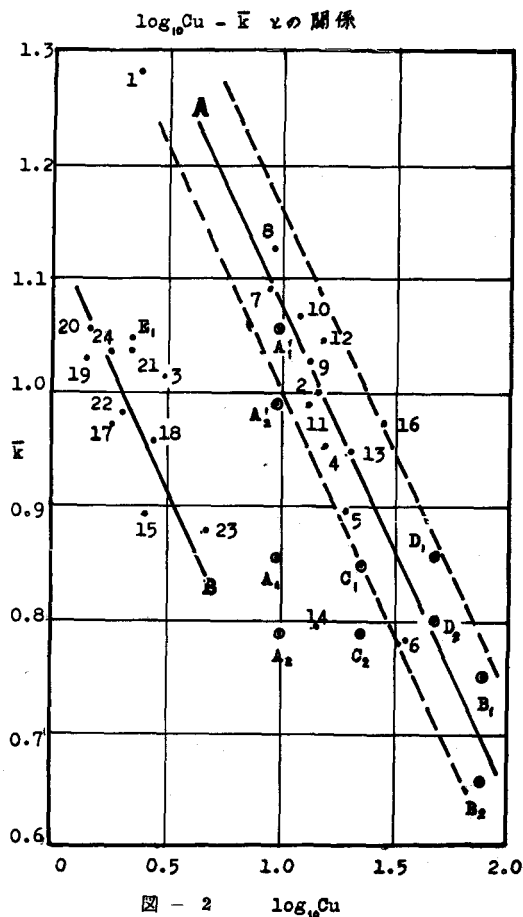


図-2 $\log_{10} Cu$

れを根拠として変換問題を考えることが出来る。¹⁷⁾

$$S(e, S) \equiv G(\ln v, r) \equiv G(u, r)$$

$$\text{但し} \quad v = 1+e, \quad u = \ln v$$

(29)

としてGの関数型をきめることを考えよう。

(16), (19), (29)より

$$p \frac{de}{1+e} + \frac{1}{3} q dr = \frac{\partial G}{\partial u} \frac{de}{1+e} + \frac{\partial G}{\partial r} dr$$

(30)

$$\therefore p = \frac{\partial G}{\partial u}, \quad q = 3 \frac{\partial G}{\partial r}$$

q = Mp の関係より

$$3 \frac{\partial G}{\partial r} = M \frac{\partial G}{\partial u} \quad \therefore G = G(u + \frac{1}{3} Mr)$$

(31)

(29), を組合せ $r = 0$ のとき $S = S_0$ としてGを定め(30)から p, q を求めると

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3} = \left(\frac{\partial G}{\partial u} \right)_{r=0} = K(1+e) \left\{ \ln \frac{1+e}{e} + \frac{S_0(1+2e)}{2e^2(1+e)^2} \right\} \\ q &= \sigma_1 - \sigma_3 = KM(1+e) \left\{ \ln \frac{1+e}{e} + \frac{S_0(1+2e)}{2e^2(1+e)^2} \right\} \end{aligned} \right\}$$

(32)

$$\therefore \sin \phi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} = \frac{3M}{6+M}$$

(33)

(33)を用いると

$$\underline{M} = \frac{6 \sin \phi}{3 - \sin \phi} = \frac{3k}{1+e}$$

(34)

処でkの一定の度合(つまりkは一定であると考えているけれども実験結果から算出して見ると、きっかり一定ではなくていくらかずれる)は多くの例から見て殆どが2~3%と見られる。大きいのは6%位のあるがそのようなのは少い、そしてeが大きくなると極く僅かkは減少する傾向があるようである。現在Mの一定性がどの程度であるかわからないが、この程度の一定値からのずれはあるのではなからうか。

(ix) 粒状体の変形特性¹⁶⁾

著者の理論はまだ降伏状態以外の変形について議論できる程になっていないが、仮りにエントロピーのあらわし方が本文に示したもので、降伏状態以外にも適用されるとすれば若干の議論をすることが出来る。その場合e, s, およびエントロピーを三軸とする空間での曲面およびその曲面上のエントロピー等高線を考えるのが便利である。つまり、変形が弾性的であればこの等高線に沿って状態の表示点は動くし弾性変形でなければ等高線から外れて、この曲面を昇るように動くからである。

(x) 著者理論の総括

著者の理論は未だ完成している訳ではないが、現在までの理論についての考え方をまとめて見る。Roscoe等の理論は塑性論を範としている、Roweの考え方もそれ程明らかではないが塑性論的である。

前者は微分型であり、後者は積分型である。村山理論、著者の理論は統計力学的である。著者は既に述べたように変形理論を一応の目的としながら、そこまで行っていない。破壊理論で導入されたk-値と云うものが、粒状体の力学特性を考える上で可成り有用であることがわかったことは幸いで

あった。これと粒状体の粒度分布から求められる可能性が出て来たので、理論が単なる理論でなく、実際問題に有用な応用を発見したことになる。

文 献

1. Rowe, P.W., The stress-dilatancy Relation for Static Equilibrium of an Assemblage of Particles in Contact, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. Vol.269, 500-527, 1962
2. Horne, M.R., The Behaviour of an Assembly of Retund, Rigid, Cohesionless Particles, 1, 11, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. Vol. 286, 1965
III, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. Vol. 310, 1969.
3. Roscoe, K.H., Schofield and C.P. Wroth., On the Yielding of Soils, Geotechnique Vol. 8, No. 1. 1958
Schofield, A., Wroth, P., Critical State Soil Mechanics, McGRAW-Hill, London, 1968
Roscoe, K.H., Burland, J.B., On the Generalized Stress-Strain Behaviour of Wet Clay, Engineering Plasticity, Cambridge Univ. Press, 1968 の一章
4. Drucker, D.C., Gibson, R.E., Henkel, D.J., Soil Mechanics and Work-hardening Theories of Plasticity, A.S.C.E., 122, 338-346, 1957
5. Drucker, D.C., Definition of Stable Inelastic Material, Trans, A.S.M.E., Journ. of Appl. Mechanics, 26:1, 101-106, 1959
6. Murayama, S., A Theoretical Consideration on a Behaviour of Sand, Rheology and Soil Mechanics, Symposium Grenoble, April, 1, 1-8, pp.146-159, Springer, Berlin, 1966
7. 村山塑朗, 松岡元, 粒状体のせん断現象の微視的考察, 土木学会第24回年次学術講演会講演集第3部, 1969
8. Mogami, T., A statistical approach to the mechanics of granular materials, Soil and Foundation, Vol. V, No. 2, 1965
9. Mogami, T., A statistical theory of mechanics of granular materials, Journ. Faculty of Engineering, Univ. of Tokyo, Ser. (B), Vol. 28, No. 2, 1965
10. Mogami, T., Angle of internal friction of the granular material and a simple transient phenomenon., Trans. J.S.C.E., No.128, 1966
11. Mogami, T., On the deformation of granular material, Trans. J.S.C.E., No. 129, 1966
12. Mogami, T., Mechanics of granular material composed of particles of various sizes, Trans. J.S.C.E., No. 137, 1967
13. Mogami, T., Imai, G., On the failure of the granular material, Soil and Foundation, Vol. VII, No. 3, 1967

14. Mogami, T., Imai, G., Influence of grain-to-grain friction on shear phenomena of granular material, Soils and Foundations, Vol. IX, No. 3, 1969
15. Mogami, T., On the critical state line proposed by Roscoe et al, Soils and Foundations, Vol. VIII, No. 4, 1968
16. Mogami, T., Mechanics of granular material as a particulated mass, Proc. 7th Int. Conf. Soil Mech. and Found. Eng., Mexico, pp. 281-285, 1969
17. 最上武雄 粒状体に統計力学的手法を適用する限界および意味, 土木学会第24回年次学術講演会講演集第3部 pp 37-40, 1969
18. Mogami, T. Discussions at the 7th Int. Conf. Soil Mech. and Found. Eng., Mexico, 1969
19. 最上武雄 レキの内部摩擦角と常数 k について, 土と基礎, 16-11, 11月, 1968
20. Mogami, T., Yoshikoshi, H., On the angle of internal friction of coarse materials, Proc. 3rd Budapest Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, pp. 190-196, 1968
21. Mogami, T., Yoshikoshi, H., On the angle of internal friction of rockfill materials, Preprints to the specialty session No. 13, Mechanical Properties of rockfill and gravel materials, 7th Int. Conf. Soil Mech. and Found. Eng. Mexico, 1969
22. 農林省農業土木試験場, 村尾重信氏の研究による

補 註

1) 3の類に属する理論として, H.B. Poorooshasbのものがある, これは Granta-Gravel 理論と異なり, 応力増分によるひずみ増分につき plastic potential が存在することを実験的に示し, ひずみ増分についての方程式を導き実験と比較した。

Poorooshasb, H.B. et al, Yielding and Flow of Sand in Triaxial Compression, Part I, II, III

Part I: Canadian Geotechnical Journal, Vol, III, No. 4, Nov. 1966

Part II, III: " " " Vol, IV, No. 4, Nov. 1967

2) 14について

Haruyama, M., Effect of Surface Roughness on the Shear Characteristics of Granular Materials, Soils and Foundations, Vol. IX, No. 4, Dec., 1969.

Takeo Mogami
Professor
University of Tokyo

This paper presents the outline of the author's theory of mechanics of granular material with short introduction of the theories by other authors, namely, Rowe, Roscoe et al and Murayama.

The rest of the paper is the explanation of the author's theory which have been reported in many papers, and some improvements in considerations are given and some errors in computation are corrected.

The basic principle of the author's theory is reconsidered from the point of view of thermodynamics basing on the theory of information. Adoption of the entropy of Boltzman's type is shown to be reasonable when the behaviour of particles at the stage of deformation near failure is taken into account. In this stage, some parts behave like rigid bodies, that is, particles in these parts do not move relatively with each other, and the deformation of the whole system is resulted from the relative motions of particles in rather narrow zones between such rigid parts.

The possible configurations of particles in these zones are equally occurable, hence the probabilities of all possible configurations of particles are considered equal, this is the reasoning for the adoption of entropy of Boltzman type.

The deformation of the granular material can be considered as inelastic, rigorously speaking this is not true but practically this assumption can be adopted. Hence, the work done to the material is equal to the energy dissipation in the material which is equal to the entropy production. Because the entropy of the material can be evaluated when the adoption of entropy of Boltzman type is legitimated, the relationship between stress components and the void ratio and its deviation, is obtained. When the evaluation of entropy, the importance of void ratio and its deviation from the mean is emphasized.

Relationships between the angle of internal friction and void ratio are reduced by the theory. The linear relationship between the k -value which is contained in our theory, and the uniformity coefficient of the material is shown, this would give a simple method of estimation of the angle of internal friction of the material. The shearing test for coarse materials is very difficult and expensive so that this method would reduce such difficulties even if this is only a rough estimation.