有限要素法による粘弾性体の解析

早稲田大学理工学部　堀　井　健一郎

早稲田大学　大学院　川　原　睦　人

1. 緒　言

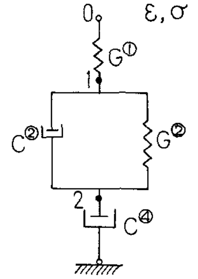
有限要素法による粘弾性体の解析は、O，C，Zienkiewicz，T．L．White，J．P．H．Webber，田中、桜井、藤田、林などにより行なわれている。 ここに述べる粘弾性体の解析方法は、レオロジーモデルにより表わされる応力歪関係が、補助変数を用いて表わすことにより多元1次連立微分方程式により与えられることに着目して、これを有限要素法の適用に便利なように変形しておき、有限要素法を適用して、解式を誘導し、これにより微小時間ごとに、くり返しこの解式を適用して粘弾性体の応力解析を行うものである。

2. レオロジーモデルにより表わされる応力歪関係の行列による表示

レオロジーモデルにより表わされる応力歪関係を、行列により表わすことを考える。 まず、各レオロジー要素（バネ及びダッシュポット）にＦｉｇ－１の如く番号をつける。 レオロジー要素とレオロジー要素の接続している接点にも同様に番号をつける。

行の数が接点の総数に等しく、列の数が、レオロジー要素の総数に等しい行列〔Ｋ〕を考え、いま才ｊレオロジー要素が才ｉ接点、才ｋ接点に接続しているとき、才ｉｊ要素が１，才ｋｊ要素が－１となる行列であるとする。 次に行と列との数がレオロジー要素の総数に等しい行列〔Ag〕，〔Ac〕，を考え、才ｉ要素がバネであるとき、〔Ag〕の才ｉｉ要素をその要素のバネ定数 $G^{\textcircled{i}}$ とし、才ｉ要素がダッシュポットであるとき〔Ac〕の才ｉｉ要素をその要素の粘性係数 $C^{\textcircled{i}}$ と微分演算子Ｐとの積 $C^{\textcircled{i}}P$ とする。

$$
[K]=\begin{array}{c|cccc}
 & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} \\
\hline
0 & 1 & & & \\
1 & -1 & 1 & 1 & \\
2 & & -1 & -1 & 1
\end{array}
$$



$$
[Ag]=\begin{array}{c|cccc}
 & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} \\
\hline
\textcircled{1} & G^{\textcircled{1}} & & & \\
\textcircled{2} & & G^{\textcircled{2}} & & \\
\textcircled{3} & & & & \\
\textcircled{4} & & & &
\end{array},\qquad
[Ac]=\begin{array}{c|cccc}
 & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} \\
\hline
\textcircled{1} & & & & \\
\textcircled{2} & & & & \\
\textcircled{3} & & & C^{\textcircled{3}}P & \\
\textcircled{4} & & & & C^{\textcircled{4}}P
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}\sigma\\0\\0\end{bmatrix}=
\begin{bmatrix}1&&&\\-1&1&1&\\&-1&-1&1\end{bmatrix}
\left(\begin{bmatrix}G^{\textcircled{1}}&&&\\&G^{\textcircled{2}}&&\\&&&\\&&&\end{bmatrix}+
\begin{bmatrix}&&&\\&&&\\&&C^{\textcircled{1}}P&\\&&&C^{\textcircled{2}}P\end{bmatrix}\right)
\begin{bmatrix}1&-1&\\&1&-1\\&1&-1\\&&1\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\varepsilon\\h_1\\h_2\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}\sigma\\0\\0\end{bmatrix}=
\begin{bmatrix}G^{\textcircled{1}}&-G^{\textcircled{1}}&\\-G^{\textcircled{1}}&G^{\textcircled{1}}+G^{\textcircled{2}}&-G^{\textcircled{2}}\\&-G^{\textcircled{2}}&G^{\textcircled{2}}\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\varepsilon\\h_1\\h_2\end{bmatrix}+
\begin{bmatrix}&&\\&C^{\textcircled{1}}&C^{\textcircled{1}}\\&-C^{\textcircled{1}}&C^{\textcircled{1}}+C^{\textcircled{2}}\end{bmatrix}\cdot
\begin{bmatrix}\dot{\varepsilon}\\\dot{h}_1\\\dot{h}_2\end{bmatrix}
$$

Fig － 1

この行列を用いることによりレオロジーモデルによりあらわされる応力歪関係は次のごとくになる。

$$
\{\sigma\}=[K]\,([Ag]+[Ac])\,[K]^T\,\{\varepsilon\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)
$$

ここに

$\{\sigma\}^T = \{\sigma, 0, 0 \ldots\ldots 0\}^T \quad \{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon, h_1, h_2, \ldots\ldots h_m\}^T$

$h_1, h_2, \ldots\ldots h_m$ は各接点に対応する補助変数である。 なおこのとき、モデルの最下端は固定しておく、 Fig－1 に Burger 体の場合について例示する。 （1）式は、又、

$$\{\sigma\} = [B_g]\{\varepsilon\} + [B_c]\{\dot{\varepsilon}\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

のようにも表わすことが出来る。

三軸応力状態においては、偏差成分、体積成分について、それぞれ独立に（1）式、（2）式が成り立つものと考える。$\{\sigma'\}$，$\{\varepsilon'\}$ をそれぞれ偏差歪、偏差応力をあらわすベクトルとし、$\{\sigma_m\}$ $\{\varepsilon_m\}$ により体積歪、静水圧的応力をあらわすとすると、

$$\{\sigma'\} = [B_g']\{\varepsilon'\} + [B_c']\{\dot{\varepsilon}'\}$$

$$\{\sigma_m\} = [B_g^m]\{\varepsilon_m\} + [B_c^m]\{\dot{\varepsilon}_m\}$$

であり、これより、応力 $\{\sigma\}$，歪 $\{\varepsilon\}$ は （2）式とまつたく同様に書き表わすことができる

3. 有限要素法の適用

有限要素法の適用に対して都合の良いように応力歪関係を変形しておく。 （2）式を歪 と、補助変数 $h_1, h_2 \ldots\ldots h_m$ とに分けて表わすと

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ \hline 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} B_{gg} & B_{gh} \\ \hline B_{hg} & B_{hh} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \hline h \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} C_{cc} & C_{ch} \\ \hline C_{hc} & C_{hh} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \hline \dot{h} \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

歪速度が微小時間 $\triangle t$ 内において一定であると仮定すれば

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ \hline 0 \end{bmatrix} = \left(\left[\begin{array}{c|c} B_{gg} & B_{gh} \\ \hline B_{hg} & B_{hh} \end{array}\right] + \frac{1}{\Delta t} \left[\begin{array}{c|c} C_{cc} & C_{ch} \\ \hline C_{hc} & C_{hh} \end{array}\right] \right) \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \hline h \end{bmatrix} - \frac{1}{\Delta t} \left[\begin{array}{c|c} C_{cc} & C_{ch} \\ \hline C_{hc} & C_{hh} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \varepsilon(0) \\ \hline h(0) \end{bmatrix} \ldots\ldots (4)$$

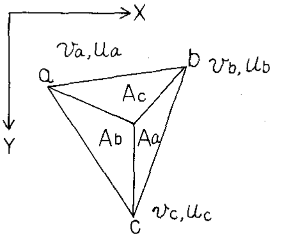
ここに、$\varepsilon(0)$，$h(0)$ は $\triangle t$ 区間における ε，h の初期値をあらわすものとする。 （4）式より補助変数 $\{h\}$ を消去したものは（5）式の如くあらわすことが出来る。

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} - \{\sigma_0\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

平面問題に対して有限要素法を適用する。 解析する構造を、三角形の要素に分割し、分割した三角形要素の節点変位をそれぞれ、$u_a, u_b, u_c, v_a, v_b, v_c$ で表わすことにし、三角形要素内の変位を

$$u = \frac{A_a}{A} u_a + \frac{A_b}{A} u_b + \frac{A_c}{A} u_c \quad , \quad v = \frac{A_a}{A} v_a + \frac{A_b}{A} v_b + \frac{A_c}{A} v_c$$

ここにAは、三角形要素の面積をあらわし、Aa,Ab,Acは、それぞれFig－2に示すごとく、面積座標をあらわしている。



Fig－2

これより、歪{ $\mathbb{E}$ }は

$$\{ \varepsilon \} = [\mathbb{A}] \{ v \} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

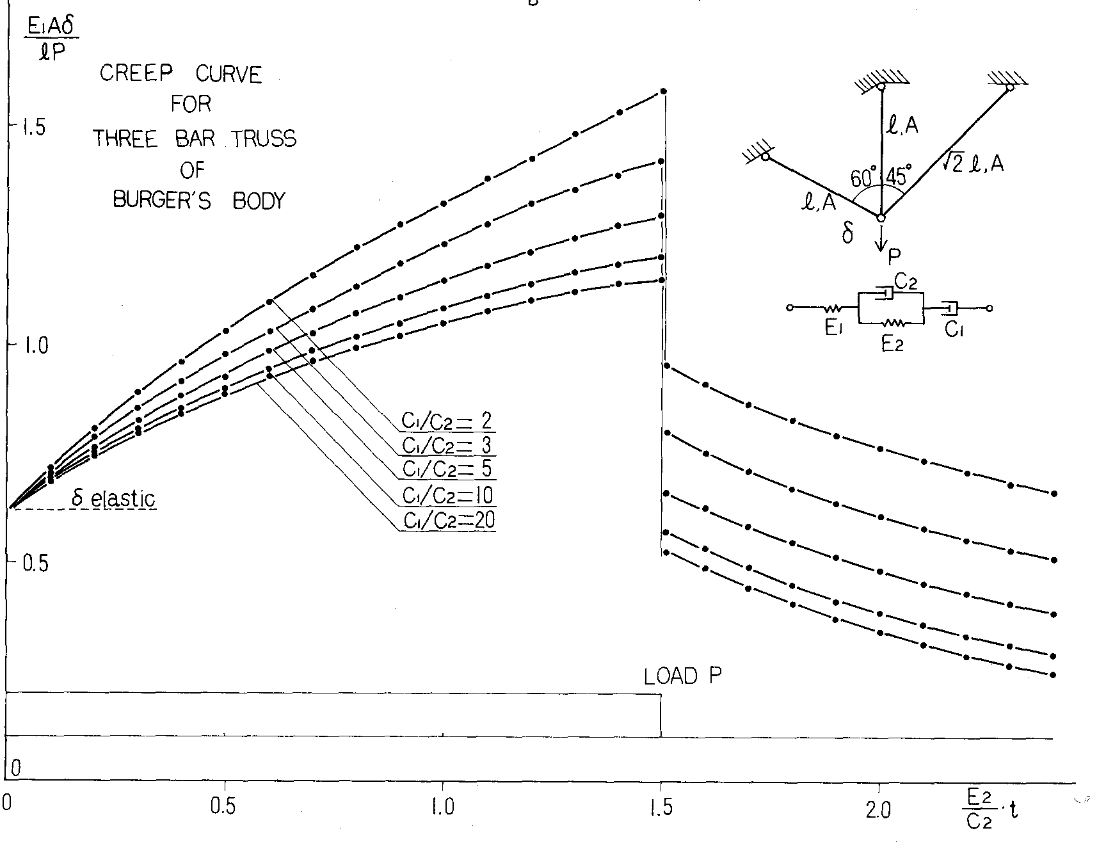
と表わすことが出来る。{ v }は節点の変位をあらわすベクトルである。（5）式，（6）式を用いて、有限要素法の教えるところにより、次の如く、構造全体に対する解式を得ることが出来る。

$$[\mathbb{K}] \{ v \} = \{ \mathbb{P} \} + \{ \mathbb{P}_0 \} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

$$[\mathbb{K}] = \left[\int [\mathbb{A}]^T \cdot [\mathbb{D}] \cdot [\mathbb{A}] dv \right], \{ \mathbb{P}_0 \} = \left[\int [\mathbb{A}]^T \cdot \{ \sigma_0 \} dv \right], \{ \mathbb{P} \}$$:外力荷重

積分は各要素の全体積について行うものとする。　（7）式は、いわゆる逐次進行型の解式である。すなわち、初期値{ $\mathbb{P}_0$ }を与え、△t時間後の{ v }を（7）式により計算し、（6）式により{ $\mathbb{E}$ }を計算し、これより{ σ }を計算する。　これをあらためて初期値として、順次計算を進めてゆく。

Fig－3



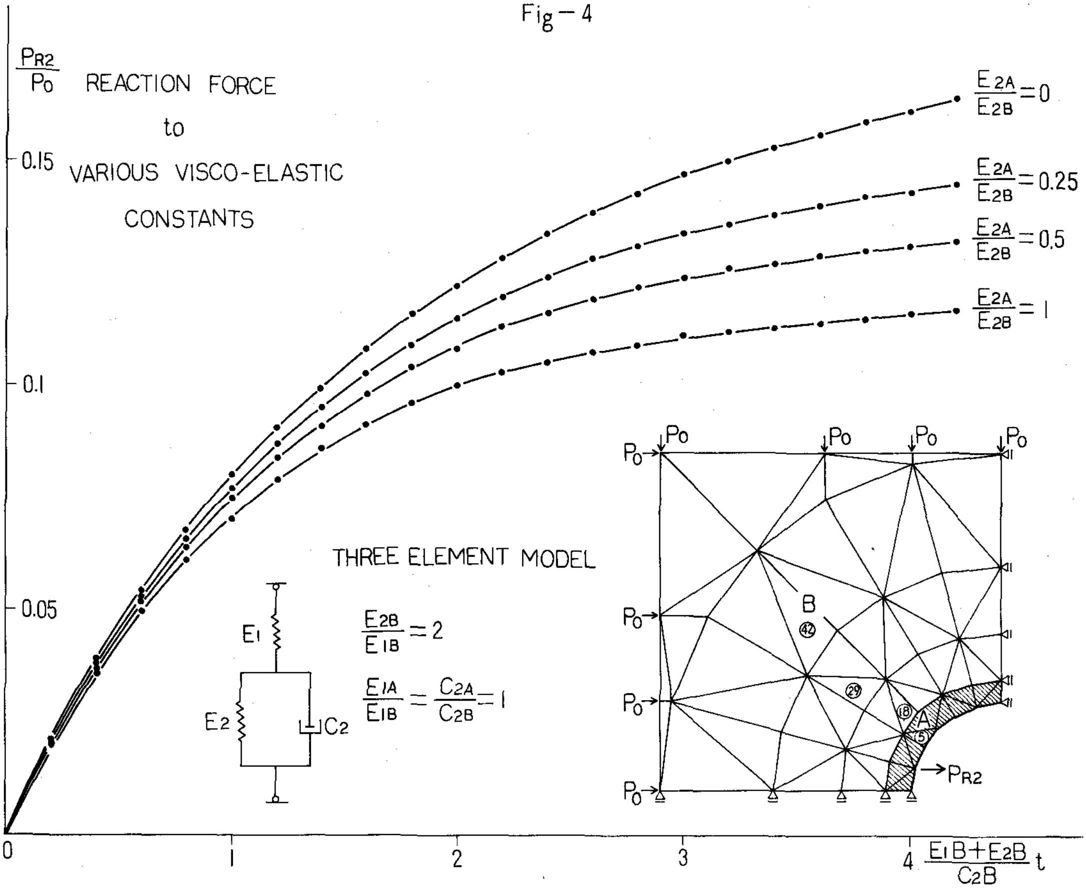
4. 適用例

Fig－3に、Fig－1により与えられた応力歪関係をもつトラスをこの方法により解析した例を示す。 Fig－4に、円弧状の切かきを持つ板に荷重を載荷し、一度弾性歪を起こさせた後、円弧状切かき部を固定すると、この点に反力が生じる。 この反力の推移を、三要素モデルにより応力歪関係があらわされる場合について解析したものを図示する。

5. 結　言

ここに述べた方法は、有限個のレオロジーモデルにより表わされる応力歪関係について、荷重境界値型問題及び変位境界値型問題に対して有限要素法を用いて粘弾性体を解析する方法である。 この方法は、任意のレオロジーモデルに対して用いることが出来、又逆行列の計算により計算を進めて行くことが出来るため、電子計算機に対するプログラムがきわめて簡単である。 又、動的問題も同様に取り扱うことが出来、かつ、いわゆる逐次進行型計算法であるため、微小時間△t内においては、構造の性状が一定であるとみなし得る場合については、非線型の応力歪関係に対して用いることが出来る利点を有している。

Fig－4



A numerical analysis on visco-elastic structures by the finite element method.

Kenichiro Horii
Mutsuto Kawahara

This paper presents a method to analyze linear visco-elastic structures, having stress-strain relations, expressed by a certain rheological model, which consist of springs and dash-pots. It describes that these rheological equations can be expressed by the first order simultaneous differential equations and are denoted by matrix forms as follows.

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma \\ \hline 0\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|c}B_{gg} & B_{gh} \\ \hline B_{hg} & B_{hh}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\varepsilon \\ \hline h\end{array}\right\} + \left[\begin{array}{c|c}C_{gg} & C_{gh} \\ \hline C_{hg} & C_{hh}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\dot{\varepsilon} \\ \hline \dot{h}\end{array}\right\} \quad \text{-------(1)}$$

where $\{\sigma\}$ and $\{\varepsilon\}$ denote stress and strain vector respectively, and $\{h\}$ is a certain parameter. Assumming the strain rate is constant, and eliminating the parameter $\{h\}$ by the lower part of equation (1), equation (1) is transformed into equation (2).

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} - \{\sigma_0\} \quad \text{--------- (2)}$$

Through the equation (2) and the conventional finite element techniques, the following equations are obtained.

$$[K]\{v\} = \{P\} - \{P_0\} \quad \text{----------(3)}$$

where $\{v\}$ and $\{P\}$ are displacement and load vector respectively, and $[K]$ is the equivalent stiffness matrix and $\{P_0\}$ is the equivalent load vector. Both terms are related with $[D]$ and $\{\sigma_0\}$ of the equation (2) respectively.

The computer program by this numerical method is very simple and easy, and needs only the matrix inversion procedures. This program can deal with arbitrary stress-strain relations, consisted of finite number of rheological models.

Since this procedure is the "step by step" method, it can be also extended to both dynamic and nonlinear problems without difficulty.