

基礎および堤体内における浸透流の解析について

名古屋大学 ○駒 田 広 也

名古屋大学 川 本 眺 万

§ 1. 概 説

浸透流の方程式は定常熱伝導の方程式と同形になる。しかしながら、浸透流の問題では熱伝導の場合と異なり、たとえば、堤体内部の浸透流のように自由水面が存在する場合には、自由水面の位置が最初未知であるから、境界条件を与えて Laplace の方程式を解くこともできない。また、透水係数の異なる不均質材料の場合にも、かなり複雑な計算になる。

本文は、有限要素法によつて、流量計算の解析をし、さらに、自由水面を有する堤体内の浸透流の解析について説明する。

浸透流の水頭 H ($= p/\gamma g + y$ ピエゾメーターの高さ) の分布は 2 次元 (x, y 座標) 定常状態で次式のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) + q = 0 \quad (1)$$

ここに、 k_x, k_y はそれぞれ、 x, y 方向の透水係数、 q は単位時間、単位体積あたりの水の発生量である。

有限要素法では、三角形要素の 3 頂点 (i, j, m) における水頭を $\{H\}^e$ とすると、(1) 式の関係は、変分原理を用いて、各要素において次式の関係で表わされる。

$$[P]\{H\}^e + \{F\}^e = 0 \quad (2)$$

上式で、 $[P]$ は 3×3 の行列であり、その各成分は次のように与えられる。

$$P_{ij} = \{ k_x (y_j - y_m) (y_m - y_i) + k_y (x_m - x_j) (x_i - x_m) \} / 4\Delta$$

他の成分も i, j, m の回転順列になる。

$$F_i = F_j = F_m = -q\Delta / 3$$

Δ は三角形の面積

§ 2. 流出孔を有する流量計算

図-1 のように、 xy 座標において、 x 軸方向と θ の角度をなす法線をもち、奥行が単位長さ、 $AB = l$ なる断面を通過する流量は次式で与えられる。

$$Q = - \left(k_x \frac{\partial H}{\partial x} \cos \theta + k_y \frac{\partial H}{\partial y} \sin \theta \right) \cdot l \quad (3)$$

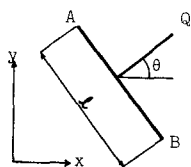


図-1

また、動水勾配 $\partial H / \partial x, \partial H / \partial y$ は次式より決まる。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_j - y_m, y_m - y_i, y_i - y_j \\ x_m - x_j, x_i - x_m, x_j - x_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_m \end{Bmatrix}$$

図-2 のように、両端が不透水層になっている断面 $S_1 S_2 \dots S_k S_{k+1} \dots S_n S_{n+1}$ を流れる流量を

考える。断面 $S_k S_{k+1}$ を流れる流量は、上流側の要素 e_k^u における動水勾配を使つて求めた流量 Q_k^u と下流側の要素 e_k^d における動水勾配を使つて求めた流量 Q_k^d とは一般には一致しないが、全断面では連続条件が満足されているから、理論的には次式が成立する。

$$\sum_{i=1}^n Q_i^u = \sum_{i=1}^n Q_i^d \quad (5)$$

図-3 のように、水圧を減ずるために、自由水面下 30 m のドックの底（幅 80 m）に左右対称に幅 0.2 m の流出孔をつけた場合の流出量を解析した結果を示す。

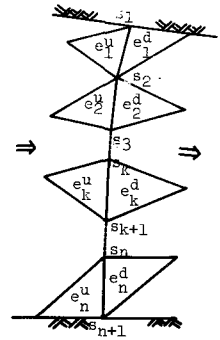


図-2

表-1 流量 単位 m^3/hour

断面	上流側 $\sum Q_i^u$	下流側 $\sum Q_i^d$	平均
$T_1 T_1$	0.506	0.506	0.506
$T_2 T_2$	0.446	0.553	0.500
$T_3 T_3$	0.416	0.585	0.501
$T_4 T_4$	0.278	0.594	0.436

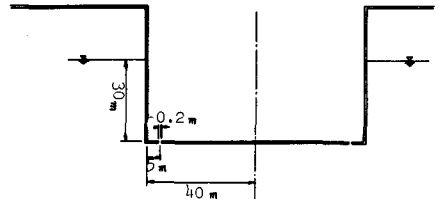


図-3 流出孔を有するドック

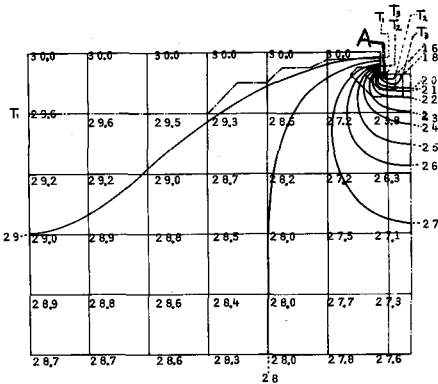


図-4 水頭分布

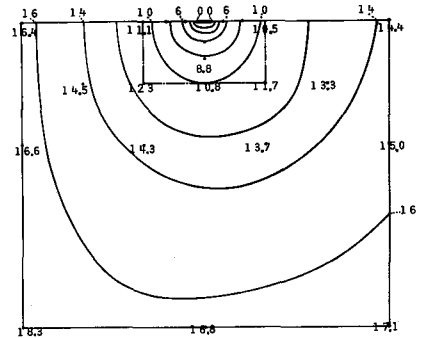


図-4' A部分の拡大図

幅 510 m、深さ 400 m の浸透領域を、自由水面上では水頭 $H = 3.0$ 、流出孔では $H = 0$ として節点数 274 の三角形要素に分割して計算した結果を示すと図-4 および図-4' のようである。

透水係数 $k = 0.01 \text{ cm/sec}$ として、図-4 および図-4' における断面 $T_1 T_1$ 、 $T_2 T_2$ 、 $T_3 T_3$ 、 $T_4 T_4$ のおのおのを通過する流量の上流側要素と下流側要素とから計算した結果を表-1 に示す。

流出孔が流入孔より小さい場合には、動水勾配は下流側ほど大きくなる。本計算では三角形要素内で動水勾配は一定としているから、一般に、 $\sum Q_i^u \leq \sum Q_i^d$ となる。要素をさらに細かくすれば、 $\sum Q_i^u \approx \sum Q_i^d$ になるだろう。流量を計算するには、動水勾配の変化が大きい断面より、動水勾配が一定した断面でチェックの方が、精度がよくなるだろう。

§ 3. 自由水面を有する堤体の浸透

自由水面が存在する場合には、浸透領域が最初未知である。自由水面での境界条件 $\partial H_s / \partial n = 0$, $H_s = y_s$ ($p_s = 0$) を満足させるためには、自由水面の位置 ($\partial H_s / \partial n = 0$) を仮定して、水頭分布を求め、その位置での水頭が $H_s = y_s$ になるまで、くり返し計算して自由水面の位置を求める。

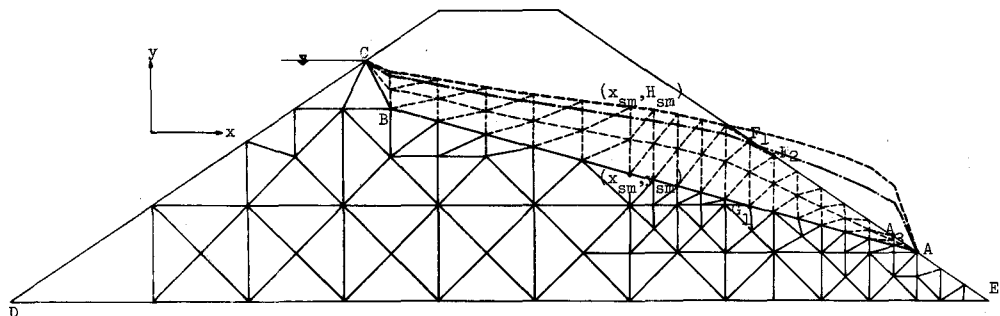


図 - 5

図 - 5 の堤体を例にして、解析の手順について述べる。上流側の水位は C 点にあり、底部 DE は不透水層とする。

第 1 段階、予想される浸潤線よりも下方に自由水面 CBA を仮定し、浸透領域 ABCDEA を三角形要素に分割する。境界条件として、 H_{CD} , H_{AE} の水頭を与える。この条件より水頭分布を求めるが、自由水面 CBA 上の節点 (x_{sm} , y_{sm}) での水頭 H_{sm} は、一般に、 $H_{sm} > y_{sm}$ となるから、(x_{sm} , H_{sm}) なる点を上流側よりプロットして、CBA 上の節点のうちで、その水頭 H_s が、最初に、堤体の下流側法面より高くなるような節点 G_1 を求め、それを通る y 軸に平行な直線と、法面との交点を F_1 とする。

第 2 段階、線 CBA と $\widehat{CF_1}$, $\widehat{F_1A}$ とに囲まれた領域に節点を取り、上流側と下流側の両端を除いて、各列 4 個の三角形要素に、両端の列は 2 個の三角形要素に分割する。浸透領域 ABCDEA に新しく領域 AF_1CBA を加えた要素で、 $\widehat{CF_1}$, $\widehat{F_1A}$ を自由水面として、境界条件 H_{CD} , H_{AE} を与えて水頭分布を求め、第 1 段階と同様にして、新しい自由水面 $\widehat{CF_2}$, $\widehat{F_2A}$ を定める。

第 3 段階、領域 AF_2CBA を第 2 段階と同様に新しく分割しなおして、境界条件は H_{CD} , H_{AE} に新しく H_{A_3} の水頭を与えて、水頭分布を求める。

第 4 段階以後 (第 n 段階)、前段階の境界条件に新しく H_{An} を与えて、 F_n と A_n が同一節点になるまで、第 3 段階と同じ操作をくり返す。それ以後は境界条件を固定して、自由水面上において、仮定した y_s と計算結果の H_s との差が一定値以下になるまでくり返し計算する。

以上、一連の計算は最初に仮定する領域 ABCDEA 内の三角形要素のデータと、堤体の形状を表わすデータを input するだけで、以後の処理は計算機内ですべての操作をおこなつて、最終的な浸潤線および水頭分布が得られる。

図 - 6 は上流、下流とも勾配 1 : 1.5 の等方等質材料の堤体の浸潤線を Casagrande の方法と比

較したものである。流出点は Casagrande の方法よりも 5 % 高くなる。上流部分の浸潤線は、一般に、Casagrande の方法よりも高くなる。

図-7 は異方性材料 ($k_y = 0.1 k_x$) の堤体における浸潤線を示している。

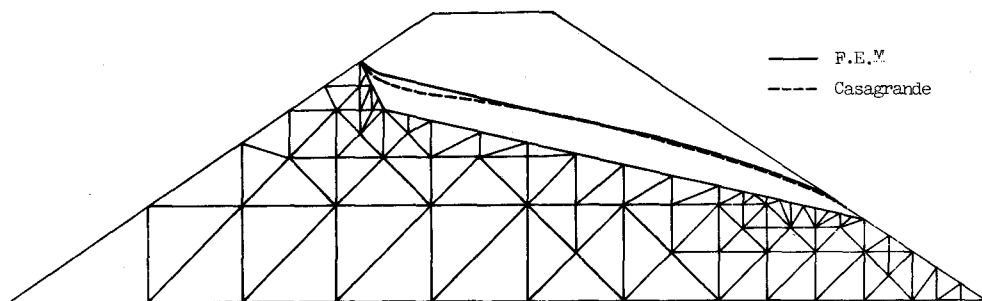


図-6 等方等質材料の堤体における浸潤線と三角形要素分割

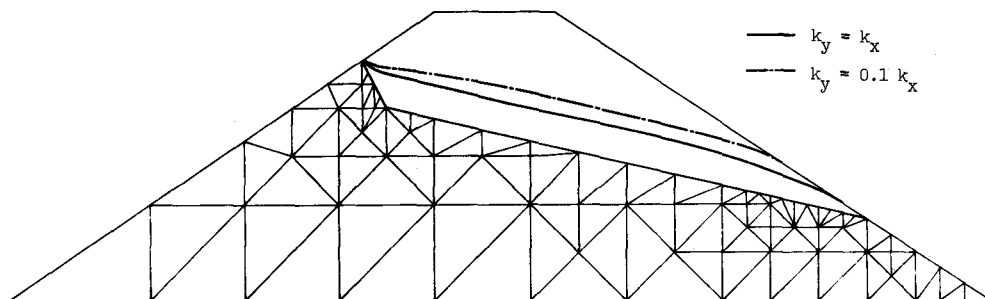


図-7 異方性材料の堤体における浸潤線と三角形要素分割

この解析方法は最初に仮定する自由水面 OBA の位置によつて、くり返し回数や計算時間に大きく影響する。しかしながら、異方性材料、不均質材料を含む場合に、浸潤線、水頭分布を計算するのに、他の解析方法では困難なことが多いが、有限要素法を使用すれば、かなりの近似で解析できる。

§ 4. むすび

以上のように、水圧軽減のための流出孔からの流量計算は、海底トンネルにおける水圧の減少量と流出量の増加の関係を知るのに応用できると思われる。

堤体にコアを含む場合の浸潤線は講演当日発表する予定である。

参考文献

- (1) Olgierd Zienkiewicz and others, " Solution of Anisotropic Seepage by Finite Elements " Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 92, No. EM 1, Proc. Paper 4676, Feb. 1966
- (2) Finn, W.D.Liam, " Finite Element Analysis of Seepage through Dam " Journal of Soil Mechanics Division, ASCE, Vol. 93, No. SM 6, Proc. Paper 5552, Nov. 1967

On the Analysis of Seepage in Foundation and Embankment

Hiroya Komada
Toshikazu Kawamoto
Depart. of Civil Engrg.
Nagoya University

Seepage problems have been solved by sketching flow nets or relaxation method. These methods are scarcely practical when the boundary of the region of seepage is not clearly defined or the soil media are non-homogeneous and nonuniformly anisotropic.

In this paper, the authors describe the application of the finite element method to such problems.

At the first, a technique for determining the quantity of seepage water from the potential distribution is presented for the steady state of seepage, the quantities of seepage water in a ground with drain ditches being calculated for an example.

The authors present a computing procedure of finite element analysis estimating the seepage flow in the embankment in which the free top flow surface is unknown. This procedure may be applied for any shape of embankment and non-homogeneous or anisotropic media. In this analysis, the position of the top flow surface in the embankment is successively calculated until the following boundary conditions

$$H_s = y_s, \quad \partial H_s / \partial n = 0$$

are satisfied on its surface.

It is enough here to use only input data for the region of seepage which is primarily divided into an arbitrary system of triangular elements, since the successive steps of calculation are automatically performed in the computer. For an example, the expression of result of calculation is illustrated by the top flow line for the embankment with side slopes of 1 on $1-\frac{1}{2}$ with homogeneous medium.

It has been found that the exit point obtained by the finite element method is about 5 % higher than that drawn in the manner suggested by Casagrande at the upstream part within the embankment. In this analysis, the position of the top flow surface has large influence on the number of times of iteration and computing time.