

1. 要 旨

従来は実際の破壊とあまり適合しないが剛体の力の釣り合いまたは全体が塑性化して一挙に破壊するとして論じていた題記の問題を、この報告は逐次破壊現象として解析しようと試みている。その着想は、荷重が増すにつれて、破壊条件に近いところは剛性が非線型的に低下することを計算に入れて、応力の再配分と各変形成分を逐次的に解析しようとする点にあり、Finite Element 法をこのような目的で拡張している。この手法を用いると従来難問題とされていた逐次破壊を定量的に論じる糸口を見出せるが、さらに大ひずみに対する補正、荷重履歴や慣性項の導入および降伏近くでの応力-ひずみ関係の正確な導入など理論面でも実験の面でも改良すべき点が多い。

2. 解析方法

平面ひずみ状態で図4の各要素が図1の応力レベルに応じた変形係数 D_R やポアソン比 μ_R として非均質に分布するとして解析する。仮定として微小ひずみ理論で剛性マトリックスを組立てているが将来は大ひずみ理論に修正したいと思っている。図1の非線形度を規定するのに図3の包絡線Ⅰ（厳密にはⅡ）と応力円の最短距離 d に応じて緩み係数 R を次式で定義する*。

$$R = \frac{10d}{\tau_R} = \frac{10}{\tau_R} \left[\left\{ \tau_R \cot \varphi - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + 2u)}{2} \right\} \sin \varphi - \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \right] \quad (1)$$

ここに u は間げき水圧である。 R が大きい程結合は強く変形係数 D_R は大でポアソン比 μ_R は小である。 R が0以下になるとその点は局部的に破損するので R が1以下では急速に D_R は小となり、 μ_R は大となる特性を次式で与え、それを図示すると図2のようになる。

$$D_R = D_{R, \text{initial}} (\log_{10} R + 0.001) \quad (2)$$

ただし $R \leq 1$ では $D_R = 0.001 D_{R, \text{initial}}$

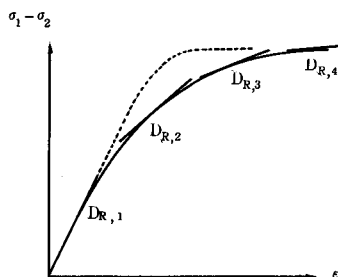


Fig. 1 Non-Linear Stress-Strain Curve

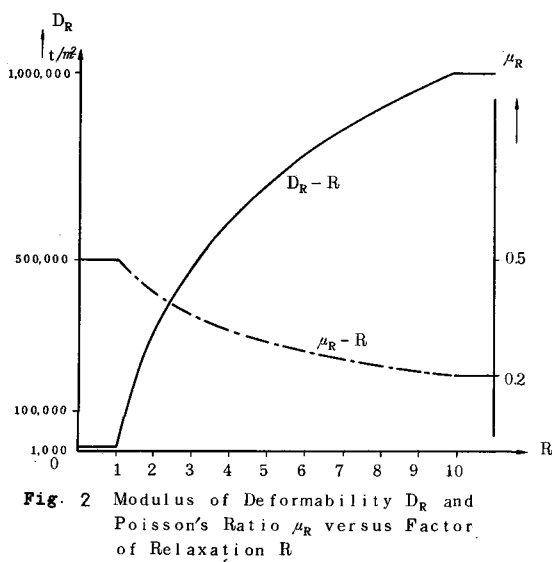


Fig. 2 Modulus of Deformability D_R and Poisson's Ratio μ_R versus Factor of Relaxation R

* 図1の点線のような鋭い変曲を扱うには係数10をさらに大きくするとよい。

$R \geq 10$ では $D_R = D_{R, \text{initial}}$

$$\mu_R = 0.5 - 0.3 \log_{10} R \quad \dots \dots \dots (3)$$

たゞし $R \leq 1$ では $\mu_R = 0.5$

$R \geq 10$ では $\mu_R = 0.2$

初期値 τ_R , $\tan \varphi_R$, D_R , μ_R などは実際の試験値の分布に基づき列マトリックス $\{\tau_R\}_n$, $\{\tan \varphi_R\}_n$, $\{D_R\}_n$, および $\{\mu_R\}_n$ として非均質に与えることは演算の何らのさまたげとならない。

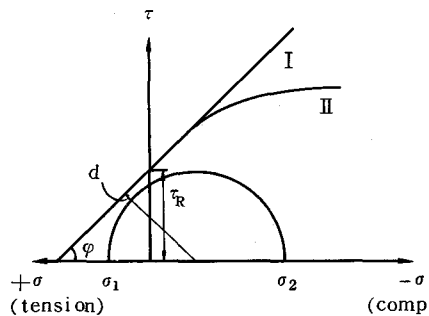


Fig. 3

図4の板要素の数 n , 可動節点の数 N とすると, 各節点の外荷重の x , y 成分の列マトリックスは $\{4L\}_{2N}$ と書ける。各要素

の3頂点 i, j, k はそれぞれヒンジ, ローラー, 自由端とし, この要素が $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma$ のひずみマトリックス $\{\epsilon\}$ を受けるときの節点 j, k の x 方向変位 u_j, u_k , y 方向変位 v_k などよりなる変位マトリックス $\{V\}$ は $\{V\} = [B]\{\epsilon\}$ となり, 応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ などを表わす $\{\sigma\}_n$ と $\{\epsilon\}$ の関係は $\{\sigma\}_n = [H]\{\epsilon\}$ で表わせる。ここに $[B]$ と $[H]$ は微小ひずみ理論より定まる変換マトリックスである。したがって, $\{\sigma\}_n = [H][B^{-1}]\{V\}$ となる。つぎに各節点に順次適用する単位仮想変位

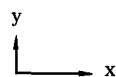
$$D_R(\text{initial}) = 1,000,000 \text{ t/m}^2$$

$$\mu_R(\text{initial}) = 0.2$$

$$\tau = 17 \text{ ton/m}^2$$

$$\sigma = 84 \text{ ton/m}^2$$

$$5 \text{ m}$$



$$\tau_0 = 250 \text{ ton/m}^2$$

$$\tan \varphi = 1.0$$

elements : $n = 58$

nodal points : $N = 32$

◎ yielding elements at $p = 4$

Fig. 4

$\{I\}$ による仮想ひずみ $\{\bar{\epsilon}\}$ は $\{\bar{\epsilon}\} = (B^{-1})\{I\}$

$= (B^{-1})$ で、一方節点力 $\{S\}$ による外部
仮想仕事 W_e は $W_e = \{I\}\{S\} = \{S\}$ で、内

部仮想仕事 W_i は $W_i = \iint \{\bar{\epsilon}\}^T \times \{\sigma\}_n dx dy$
 $= \iint (B^{-1})^T [H] (B^{-1}) \{V\} dx dy$ である。

仮想仕事の原理により $W_e = W_i$ と置き、 $\{S\}$
 $= [\iint (B^{-1})^T [H] (B^{-1}) dx dy] \{V\} = [k_i] \{V\}$
となる。 $[k_i]$ を各要素の剛性マトリックス⁽¹⁾と

呼び、各要素の座標、変形係数、ポアソン比より計

算できる。系全体としての剛性マトリックス $[k]$

は今の $[k_i]$ を右下りの対角要素として配列し、他
の要素をゼロとした $3n$ 行 $3n$ 列の正方マトリク

スで表わせる。さらに各節点変位 $\{r\}$ による隣接

点変位 $\{V\}$ の関係式 $\{V\} = [a] \{r\}$ および

$\{r\}$ による節点力 $\{4L\} = [K] \{r\}$ とすると、若

干の計算により $[K] = [a]^T [k] [a]$ なる関係

が導かれる。また各要素ごとの応力マトリク

ス $\{\sigma\}_n = [H] (B^{-1}) \{V\} = [G_i] \{V\}$ とす

ると、系全体としての $[G]$ は $[G_i]$ なる小行

列を右下りの対角線上に配列し、他の要素をゼ

ロとした正方行列となり、系全体としての応力

$\{\sigma\}$ は $\{\sigma\} = [G] \{V\}$ となる。荷重段階

$p=1, 2, 3, \dots$ で $\{\sigma\}$ と $\{r\}$ を求めて

から前段階 ($p-1$) でのそれらと加えてから、

緩み係数 $\{R\}$ を (1) で、変形に関する数 $\{D_R\}$

と $\{\mu_R\}$ を (2) と (3) で求めて ($p+1$) の段階に移ることになる。耐荷力は変位が急増したときの
荷重として判断することになるがこの論議は別の機会に譲る。従来の安定を論ずる考えと全く異なる
ことは、剛性の変化、応力の再分布、逐次的な変位量などを定量的に論じながら安定を考えることに
ある。

3. 一試算例と考察

図4の $n=58$ の基盤が最初、変形係数 $D_R=100$ 万 t/m^2 , $\mu_R=0.2$ で存在し、これに外荷重が図4
のように作用し、荷重が $p=1, 2, 3, 4$ と増していった場合には、前節で述べた計算を IBM 7090
で行った結果、変形係数 D_R が図5のように各段階で変化し、剛性の分布は興味ぶかい変遷を示して

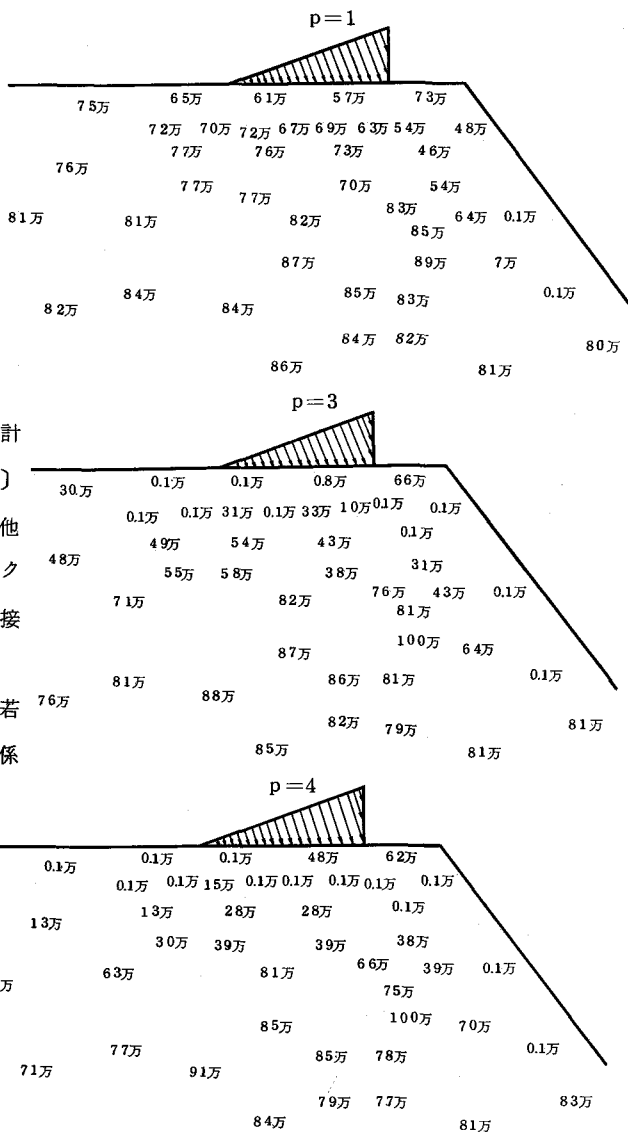


Fig.5 Changes of Deformability D_R

いる。式(2)でのべたように下限値は 0.1 万に抑えたので 0.1 万となったところは塑性化したところであり、 $p=4$ での塑性域は図4に⊙で示してある。その領域は載荷面直下と法面沿いにあらわれ、注目すべきは図5の $p=1$ ですてに法面沿いだけ塑性化が認められることである。

変位については図6に示したように、載荷端A点の沈下 $\delta_{y,A}$ および法肩B点のはらみ出し $\delta_{x,B}$ はともに荷重倍数 p と共に非線形に急増する。

応力分布の詳細については述べるべき紙面がないので、図7に板要素No.3 (図4参照)の最大圧縮応力 σ_2 、沈下 δ_y 、変形係数 D_R 、ポアソン比 μ_R および緩み係数 R の変遷を例示しておく。こゝでは省略したが、ある位置では早く応力が頭打ちとなり変位のみが増す傾向を生じ、ある位置では応力が次第に急増する傾向を生ずるなど、基盤内部の相互作用を物語る結果を得ている。

この数値計算例は与えた応力一ひずみ曲線の非線形性や要素の数の不足などをさらに改良し実際に近づけてから従来の耐荷力評価法との関連を論議することにした。

4. 結 び

(1) 逐次破壊現象として変形の増大、剛性分布の変化および応力の再配分などを理論的に追跡することが可能なように思われ、その試みを示した。

(2) とくに変形の逐次的増大傾向をこの方法で予測できれば、実測変形値のマージンを定量的に判断するのに有効な方法となろう。

終りに電研の電子計算機室の鶴沢和子氏が十数回のプログラムの修正に快く応じながら、その作成に協力下さったことに深く感謝します。
(1966年9月)

参考文献 (1) Clough, R. W. "Stress Analysis" chapter 7. (editor Zienckewicz) 19

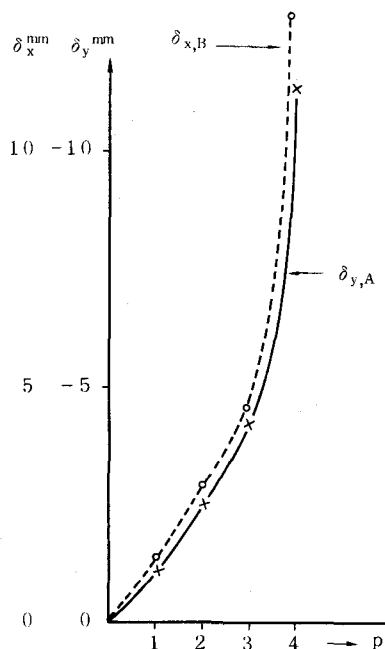


Fig. 6 Load Factor-Settlement δ_y , at the point A and Lateral Displacement $\delta_{x,B}$ at the point B

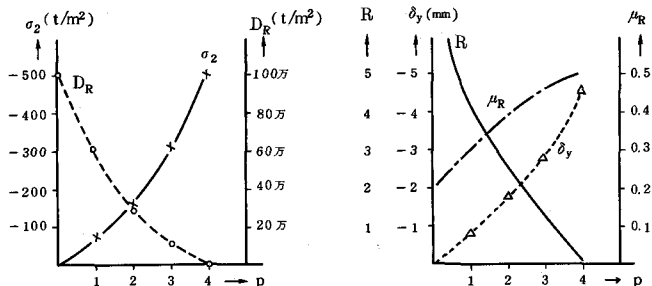


Fig. 7 Load Factor p -Modulus of Deformability D_R
 " p -Principal Compressive Stress σ_2
 " p -Settlement δ_y and Poisson's Ratio μ_R
 " p -Factor of Relaxation R
 (example of values in element No.3)

An Analysis of Progressive Failure of Foundation
with Non-Linear Deformability and Inhomogeneity

Masao Hayashi

(Civil Engineer in the
Central Research Institute
of Electric Power Industry
Iwado, Komae-cho, Tokyo)

(Sept. 1966)

Summary:

Progressive Failure of Foundation is analysed based on the finite element method in taking into account of the non linear elasticity and local internal yielding in the cohesive foundation. Changes of deformability and stress-redistribution are calculated in stepwise increase of external load, and then the author found the distribution of rigidity, stresses and displacements ~~overall~~ in the foundation.

Although this method will be available for estimation of bearing capacity, it should be furthermore studied in the large strain theory, complicated loading hystory, inertia problem and stress-strain law near the fracture in confining condition.