環境管理施設の共同更新のための費用配分に関する研究

谷本　圭志[1]

[1]正会員　鳥取大学助教授　工学部社会開発システム工学科
（〒680-8552 鳥取県鳥取市湖山町南4-101）
E-mail:tanimoto@sse.tottori-u.ac.jp

環境管理施設の健全な機能を維持するにはその更新が必要である．その際，異なった主体がそれぞれ所有するいくつかの施設をまとめて同時に更新することで，各主体の維持管理の費用を削減できる可能性がある．しかし，個々の主体が選好する更新のタイミングが一致する保証はない．本研究では，動的協力ゲーム理論を援用して，複数の施設をまとめて同時に更新することで節減できる費用を主体に適切に配分するとともに，効率的に総期待割引費用を削減するためのメカニズムを構築する．その上で，費用配分ゲームの特徴が更新費用の節約額の関数によって特徴づけられることを示す．さらに，費用配分手法に要請される公理を明らかにするとともに，それらを満たす手法としてシャープレイ値が有効であることを示す．

Key Words : *cost allocation, replacement, dynamic cooperative game, axiom*

1. はじめに

環境管理施設が常に健全に機能することを保証するには，その更新を行うことが維持管理上において有用である．しかし，更新には少なからず費用が発生する．費用を削減するためにはいくつかの方法があるが，以下の点に着目することも有意義である．

当該の環境管理施設が管理の対象としている環境財は，必ずしもその施設を所有している主体によってのみ管理されているのではなく，複数の主体が異なった環境管理施設によって管理していることが少なからずある．このことは，河川施設の所有者が多様であることを想像すれば理解にたやすく，環境管理施設の一つの特徴と言えよう．また，同一の環境財ではなくても，水道施設のように，その施設の近くに異なった主体が管理するライフラインが併設されていることもある．よって，いくつかの環境管理施設をまとめて同時に更新（以後，「共同更新」と呼ぶ）することで，工事費用や周囲への影響を緩和し，更新の費用を削減することが期待できる．

しかし，それぞれの主体が選好する更新のタイミングが一致する保証はない．よって，費用が最小となるように共同更新することを各主体に動機付けることは，各主体に還元される費用節減額を大きくしうるという意味で重要である．

更新に着目する場合，それを施した時点における施設の状態が良好になるだけではなく，その時点以降においても良好な状態を保持する可能性を高める点を無視してはいけない．すなわち，更新によって削減できる費用は現時点のそれのみならず，それ以降の長期的な費用を削減しうるものである．また，長期的な費用は，将来において更新をいつ実施するかにも依存する．よって，各主体の合理的な意思決定の目的は，長期的・動的な環境下における費用の削減となる．

しかしながら，この状況を検討した研究はこれまでにない．更新に関する従来の研究は，一つないしは複数の施設を一人の主体が管理する場合を扱っており（それらをレビューした研究として Wang,[1] Cho *et al.*[2]などがある），複数の主体が関与する状況は扱っていない．一方で，費用配分は協力ゲーム理論において多くの知見を蓄積しているが，それらのほとんどが静的な環境を扱っている（Young[3]，Moulin[4]などを参照のこと）．しかし，環境管理の分野においては Petrosjan[5], Germain[6]など，本研究と同様の関心に基づく研究も見られるが，解が存在する限定的な状況を扱っている．そこで，本研究では，それぞれの主体が管理する施設を共同更新する場面に着目し，更新に関する長期的な費用を適切に配分することで，費用効率的な更新を動機付けるための費用配分メカニズムを検討する．その際，動的な協力ゲームを援用し，どのクラスの配分手法が適切となるのかについて分析する．

2. モデル

環境管理施設を管理している主体の集合を $D=\{1, 2, \ldots, N\}$ で表す．これらの主体が費用の配分に係るゲーム（以後，「費用配分ゲーム」と言う）のプレイヤーである．任意の主体を $n(\in D)$ で表す．主体が管理する施設の全体を一つのシステムとし，個々の主体が管理する施設をシステムの要素と呼ぶ．各主体は一つの要素を管理しているものとする．よって，主体 n が管理する要素を「要素 n」と呼ぶことができる．要素 n の劣化状態を i_n で表す．ここに，劣化状態 i_n は離散値で与え，$0 \leq i_n \leq s+1$ であるとする．劣化状態 i_n の数値の増加は劣化の進行を表し，$s+1$ は故障状態である．時間も離散的であるとする．各要素の劣化状態のベクトルを「システムの状態」と呼び，$I=(i_1, i_2, \ldots, i_N)$ で表す．主体の行動集合は，更新をするかしないかのいずれであるとする．

劣化状態が i_n であるときに要素 n を更新した場合に要する費用（以後，「更新費用」と言う）を $r_n(i_n)$ で表す．更新をした場合，更新は一単位時間で終了し，次期においては劣化状態が 0 になる．更新しなかった場合には，要素を運転する費用（以後，「運転費用」と言う）が発生し，当該単位時間におけるそれを $l_n(i_n)$ で表す．この場合，次期には劣化状態が推移確率 $p_n(j_n \mid i_n)$ にて劣化状態が悪くなる．ただし，更新をしない場合に自然に劣化状態が良くなることはないものとする．すなわち，$p_n(j_n \mid i_n) = 0$ $(j_n < i_n)$ である．単位時間当たりの割引因子を β $(0 < \beta < 1)$ で表す．各要素の劣化状態の観測には時間および費用はかからないものとする．

すると，今期の劣化状態が i_n であるときに任意の主体 n が更新した場合の無限遠までの期待費用（以後，「総期待割引費用」と呼ぶ）$R_n(i_n)$，および更新しなかった場合のそれ $L_n(i_n)$ はそれぞれ(1), (2)式で表される．

$$R_n(i_n) = r_n(i_n) + \beta\phi_n(0,0,\ldots,0) \tag{1}$$

$$L_n(i_n) = l_n(i_n) + \beta \sum_{j_n=i_n}^{s+1} p_n(j_n \mid i_n)\phi_n(0,\ldots, j_n, \ldots, 0) \tag{2}$$

ここに，$\phi_n(I)$ はシステムの状態が I であるときの，主体 n に配分される総期待割引費用の配分値である．(1), (2)式は，任意の主体 n は他のすべての主体が今期に更新するとして総期待割引費用を見積もっていることを仮定している．この仮定は，主体が他の主体の行動に関して悲観的な想定をしており，かつ，他のすべてのプレイヤーが更新することが悲観的，すなわち，主体 n の費用を最大にする行動である場合に妥当となる．主体が他の主体の行動に関して悲観的な想定をしていることは，従来の協力ゲームにおいて特性関数や費用関数を定義する際に用いられる一つの方法である [7]．本研究のように動的な環境下で主体の意思決定の相互作用がある複雑な状況において主体が悲観的な想定をすることは無理のない仮定と思われる．もし，この仮定を許さないとすれば，他のすべての主体の行動が最適反応になっている状況を扱うことになる．しかし，そのような行動の組み合わせが常に唯一存在する保証はない．

しかし，主体の悲観的な想定の仮定が許容されたとしても，他のすべての主体が更新する場合に当該の主体の費用が最大になることは自明ではない．この点については第四章の(3)で議論する．

主体の集合を提携と呼び，任意の提携を $S(\subset D)$ で表す．任意の提携においては，その提携に属する主体が管理する要素について，提携全体の総期待割引費用を最小とする共同更新すべき要素を決定するものとする．要素の集合 T を共同更新した際にその時点において得られる更新費用の節減額を $u(T)$ で表し，$u(T) \geq 0, u(\emptyset) = 0$ である．すると，システムの状態が I であるとき，提携 S の総期待割引費用は次式で表される．

$$C(S; I) = \min_{T \subset S}\Big[\sum_{n \in T} R_n(i_n) + \sum_{n \in S \setminus T} L_n(i_n) - u(T)\Big] \tag{3}$$

(3)式で定義される費用関数 $C(S; I)$ に基づくゲームを，費用配分ゲーム C_I と呼ぶ．なお，(3)式では，提携 S においてどの要素を更新するのかを決定するにもかかわらず，提携の構成員は自分自身を除いたその他の主体の行動が更新であるとの仮定をそのまま持ち込んでいることに注意を要する．この意味において，本研究で検討するメカニズムは近似的なものである．なお，この近似を許さない場合，以下におけるすべての解析的な検討は著しく複雑になるないしは不可能になることをここでは指摘しておくに留める．提携 S において更新される要素の集合を次式のように表す．

$$M_S(I) = \arg\min_{T \subset S}\Big[\sum_{n \in T} R_n(i_n) + \sum_{n \in S \setminus T} L_n(i_n) - u(T)\Big] \tag{4}$$

費用配分手法 ϕ が与えられたときの配分費用は，任意の提携に関する費用関数に対して一意に決定される．すなわち，次式が得られる．

$$\phi : C \rightarrow \Re_+^N \tag{5}$$

ここに，(3), (5)式より，各主体に配分されるのは総期待割引費用である．このことは，先述したように，更新をすることによって現在から無限遠までの長期的な費用が削減されうることから，主体の関心は総期待割引費用の最小化であり，そうである以上，総期待割引費用を配分することは主体の間での交渉力を公正に評価しているという意味で適当である．しかし，各期において発生した費用と各主体に配分される費用がバランスしている保証は必ずしもない．総期待割引費用の配分が各期におけ

る費用のバランスの条件との両立については，第四章の(1)で検討する．

3. 費用配分ゲームの特性

本研究における費用配分は動的であるため，主体の提携可能性を表す劣加法性や，コアの大きさを示す凸性の成立については必ずしも自明ではない．以下に，これらのゲームの特性が成立する十分条件を導出する．以下では，$C(S;I)$および$M_S(I)$におけるIの表記を省略する．

定理 1：u が優加法的である場合に，C は劣加法的である．ただし，u が優加法的，C が劣加法的であるとは，それぞれ次式が成立していることである．

$$u(S\cup T) \geq u(S)+u(T)\ (\forall T\subset S, S\cap T=\emptyset) \tag{6}$$
$$C(S\cup T) \leq C(S)+C(T)\ (\forall T\subset S, S\cap T=\emptyset) \tag{7}$$

証明：$M_S\subset S, M_T\subset T$より，$M_S\cup M_T\subset S\cup T$である．よって，(3)式より次式が成立する．

$$C(S\cup T)\leq \sum_{n\in M_S\cup M_T} R_n(i_n)+\sum_{n\in(S\cup T)\backslash(M_S\cup M_T)} L_n(i_n)-u(M_S\cup M_T) \tag{8}$$

$S\cap T=\emptyset, M_S\subset S, M_T\subset T$より $M_S\cap M_T=\emptyset$であることに留意すると，(6)式より次式が成立する．

$$\begin{aligned}&\sum_{n\in M_S\cup M_T} R_n(i_n)+\sum_{n\in(S\cup T)\backslash(M_S\cup M_T)} L_n(i_n)-u(M_S\cup M_T)\\ &\leq \sum_{n\in M_S\cup M_T} R_n(i_n)+\sum_{n\in(S\cup T)\backslash(M_S\cup M_T)} L_n(i_n)-u(M_S)-u(M_T)\end{aligned} \tag{9}$$

(9)式の右辺に関して次式が成立する．

$$\begin{aligned}&\sum_{n\in M_S\cup M_T} R_n(i_n)+\sum_{n\in(S\cup T)\backslash(M_S\cup M_T)} L_n(i_n)-u(M_S)-u(M_T)\\ &=\sum_{n\in M_S} R_n(i_n)+\sum_{n\in S\backslash M_S} L_n(i_n)-u(M_S)\\ &+\sum_{n\in M_T} R_n(i_n)+\sum_{n\in T\backslash M_T} L_n(i_n)-u(M_T)\\ &=C(S)+C(T)\end{aligned} \tag{10}$$

(8)～(10)式より，(7)式を得る．

【証明終】

定理 2：u が凸性を満たしている場合に，C も凸性を満たす．ただし，u，C が凸性を満たすとは，それぞれ次式が成立していることである．

$$u(S\cup T)+u(S\cap T)\geq u(S)+u(T)\ (\forall T\subset S) \tag{11}$$
$$C(S\cup T)+C(S\cap T)\leq C(S)+C(T)\ (\forall T\subset S) \tag{12}$$

証明：(11)式より，次式が成立する．

$$\begin{aligned}&\sum_{n\in M_S\cup M_T} R_n(i_n)+\sum_{n\in(S\cup T)\backslash(M_S\cup M_T)} L_n(i_n)-u(M_S\cup M_T)\\ &\leq \sum_{n\in M_S\cup M_T} R_n(i_n)+\sum_{n\in(S\cup T)\backslash(M_S\cup M_T)} L_n(i_n)\\ &-u(M_S)-u(M_T)+u(M_S\cap M_T)\end{aligned} \tag{13}$$

ここで，次式が成立する．

$$\begin{aligned}&\sum_{n\in M_S\cup M_T} R_n(i_n)+\sum_{n\in(S\cup T)\backslash(M_S\cup M_T)} L_n(i_n)\\ &-u(M_S)-u(M_T)+u(M_S\cap M_T)\\ &=\sum_{n\in M_S} R_n(i_n)+\sum_{n\in S\backslash M_S} L_n(i_n)-u(M_S)\\ &+\sum_{n\in M_T} R_n(i_n)+\sum_{n\in T\backslash M_T} L_n(i_n)-u(M_T)\\ &-[\sum_{n\in M_S\cap M_T} R_n(i_n)+\sum_{n\in(S\cap T)\backslash(M_S\cap M_T)} L_n(i_n)-u(M_S\cap M_T)]\end{aligned} \tag{14}$$

ここで，$M_S\subset S, M_T\subset T$より，$M_S\cap M_T\subset S\cap T$である．よって，(3)式より次式が成立する．

$$C(S\cap T)\leq \sum_{n\in M_S\cap M_T} R_n(i_n)+\sum_{n\in(S\cap T)\backslash(M_S\cap M_T)} L_n(i_n)-u(M_S\cap M_T) \tag{15}$$

(14), (15)式より，次式を得る．

$$\begin{aligned}&\sum_{n\in M_S\cup M_T} R_n(i_n)+\sum_{n\in(S\cup T)\backslash(M_S\cup M_T)} L_n(i_n)-u(M_S)-u(M_T)\\ &+u(M_S\cap M_T)\leq C(S)+C(T)-C(S\cap T)\end{aligned} \tag{16}$$

(8), (13), (16)式より，(12)式を得る．

【証明終】

定理 1, 2 より，費用配分ゲームの特性は更新費用の節減額 u で特徴づけられることが明らかになった．

4. 費用配分手法に要請される公理

(1) 加法性

第二章で述べたように，総期待割引費用の配分が各期における費用のバランスの条件と両立していることが要

請される．この両立を満たす条件が加法性[8]である．費用配分ゲーム C における費用配分ベクトルを $\phi(C)$ で表すと，一般に加法性は次式で表される．

$$\phi(C_1+C_2)=\phi(C_1)+\phi(C_2) \tag{17}$$

加法性は，個々のゲームにおける配分費用の和は，その線形和として与えられるゲームにおける配分費用と等しいことを表している．

(1)〜(3)式より，総期待割引費用は，現時点において発生している費用と次期以降に発生している費用の和で構成されている．このことから，システムの状態 I のもとで現時点において発生している費用の配分ゲームを c_I で表すと，費用配分ゲーム C_I は $c_I+\beta E[C_J]$ で与えられる．ここに，E は次期のシステムの状態に関して期待値をとることを表している．よって，(5)式で表す費用配分は次式で表される．

$$\phi(C_I)=\phi(c_I+\beta E[C_J]) \tag{18}$$

一方，各期に発生した費用が各主体に配分されるというバランスの条件を満たすためには，現時点において実現した費用はそのつど主体に過不足なく配分されることが要請されるため，次式が成立していなければならない．

$$\phi(C_I)=\phi(c_I)+\beta E[\phi(C_J)] \tag{19}$$

総期待割引費用の配分が各期における費用のバランスの条件と両立しているとは，(18), (19)式で与えられる $\phi(C_I)$ が一致することである．すなわち，次式が成立することである．

$$\phi(C_I)=\phi(c_I+\beta E[C_J])=\phi(c_I)+\beta E[\phi(C_J)] \tag{20}$$

ここで，E で求められる期待値は(2)式に示すように各システムの状態のもとでの配分値とその状態の生起確率の積で表されること，また，一般に任意の $\beta>0$ に対して $\phi(\beta C_J)=\beta\phi(C_J)$ が成立することに留意すると，(20)式が成立することは費用配分手法に加法性が成立していることに他ならない．よって，本研究において用いる費用配分手法は加法性を満たしている必要がある．

(2) ダミー

本研究では協力ゲームを援用していることから，全ての主体の共同更新への参加が拘束的な合意であることを仮定している．しかし，費用配分手法がダミーの公理を満たしていれば，費用の増減に貢献しない主体への配分費用を(1), (2)式のうちの最小値，すなわち，その主体が仮に共同更新に参加しなかった場合における費用とすることで，実質的に共同更新に参加しない状況を保証することができる．なお，ダミーの公理を一般的に表せば，以下のようになる[8]．

$$C(S)-C(S\backslash\{n\})=C(\{n\})\,(\forall S,\,n\in S)\Rightarrow\phi_n(C)=C(\{n\}) \tag{21}$$

ダミーの公理は，協力ゲームという理論的な枠組みが付加する「主体の参加に関する制約」を実質的に除外することができる．本研究において用いる費用配分手法にはダミーの成立が適当である．

(3) 強単調性

第二章で述べたように，他のすべての主体が更新する場合に当該の主体の費用が最大になっていることが要請されるが，これは必ずしも常に成立しない．しかし，更新費用，運転費用にある条件が成立し，かつ，凸性が成立しているゲームにおいて，費用配分手法に強単調性の公理[9]が満たされている場合には，この性質が十分満たされる．

一般に，強単調性は次式で表される．

$$C(S)-C(S\backslash\{n\})\le C'(S)-C'(S\backslash\{n\})\,(\forall S,\,n\in S)\Rightarrow\phi_n(C)\le\phi_n(C') \tag{22}$$

上式より，強単調性は当該主体の限界費用が増加したゲームにおいては，その主体への配分費用も大きくなることを要請している．よって，費用配分手法が強単調性を満たしているとき，他のすべての主体が更新する場合に当該の主体の費用が最大になっている，すなわち，(23)式が成立するための十分条件は(24)式が成立していることである．ただし，$I_1=(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_N)$, $I_0=(i_1,\ldots,0,\ldots,i_N)$, $(\forall k\neq n)$ である．

$$\phi_n(I_1)\le\phi_n(I_0) \tag{23}$$

$$C(S;I_1)-C(S\backslash\{n\};I_1)\le C(S;I_0)-C(S\backslash\{n\};I_0)\,(\forall S,\,n\in S) \tag{24}$$

定理3：(25)〜(28)式が成立しているもとで，費用配分手法が強単調性を満たし，かつ，u が凸性を満たしている場合，(23)式が成立する．すなわち，他のすべての主体が更新する場合に当該の主体への配分費用が最大になっている．

$$l_n(i_n),\,r_n(i_n)\text{ が }i_n\text{ に関し非減少} \tag{25}$$

$$l_n(i_n)-r_n(i_n)\text{ が }i_n\text{ に関し非減少} \tag{26}$$

$$\sum_{j_n=k_n}^{s+1}p_n(j_n\mid i_n)\text{ がすべての }k_n\text{ に対し，}i_n\text{ に関し非減少} \tag{27}$$

なお，(27)式が成立していれば，任意の非減少関数$f(x)$に対し，次式が成立する[10].

$$\sum_{j_n=i_n}^{s+1} p(j_n \mid i_n) f(j_n) \text{が} i_n \text{に関し非減少} \qquad (28)$$

証明：付録を参照.

以上より，加法性とダミーは費用配分手法に要請される基本的な公理として，また，強単調性は当該の主体が他の主体の行動に関して悲観的な想定をしていることとの整合性を保証するための公理として必要である．これらの公理を満たす費用配分手法にシャープレイ値[8]がある．この方法では，ある種の限界費用を加重平均して配分費用を導出する．その詳細および公理の関係は，例えば鈴木[11]を参照されたい.

さらに，凸性を満たすゲームにおいてシャープレイ値はコアを十分満たすことが知られている[12]．よって，凸性を満たすゲームにおいてシャープレイ値を費用配分手法として適用すれば，これらのすべての公理が満たされるとともに，コアも満たす．コアは，すべての主体が全員での共同更新に参加することを動機付ける十分条件であることから，シャープレイ値を適用することは有効である.

5. おわりに

本研究では，環境管理施設の維持管理において，いくつかの施設を共同更新することで総期待割引費用を削減できることに着目した．その際，各施設を管理している主体が選好する更新のタイミングが一致する保証はないことから，すべての主体の費用の合計が最小となるように更新する施設を決定しつつ主体に公正に費用を配分するメカニズムを検討した.

更新に係る費用配分は動的なゲームであるものの，劣加法性や凸性といったゲームの特性は更新費用の節約額によって特徴付けられることが分かった．これにより，複雑な動的ゲームを解析することなく，更新費用の節約額に着目することでゲームの特性を判断しうることが明らかになった．また，本研究の文脈において費用配分手法に要請される公理を導出し，それを満たす手法としてシャープレイ値が有効であることを示した．特に，ゲームに凸性が成立している場合には，シャープレイ値はコアも満たすことから，全ての主体が共同更新に参加するための十分条件も得られる.

本研究では，その他の主体の行動が更新である場合に任意の主体の費用が最大になることを先見的に仮定し，その仮定と整合するために要請される公理を導くアプローチをとった．しかし，例えばTanimoto[13]のように，本研究とは異なる先見的な仮定をおいた上で，本研究と同様の検討をすることもできる．しかし，その場合には，本研究で要請された公理とは異なる公理が要請されるため，シャープレイ値とは異なった費用配分手法が有効となりうる．先見的な仮定との整合性という観点では，シャープレイ値であれその他の手法であれその有効性は同じである．このような性質が導かれるのは動的なゲームならではであり，静的なゲームに見られない興味深い点である．今後は，費用配分手法が満たす公理が主体の行動および費用にどのような影響を与えるのかについての検討が必要となろう.

付録　定理3の証明

(A.1)式を満たせば(23)式は十分成立する．よって，以下では(A.1)式の成立を証明する．また，表記の簡単のため，集合$\{n\}$をnと略記する.

$$\phi_n(I') \le \phi_n(I)\,;\, I=(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_N),\, I'=(i_1,\ldots,i_k',\ldots,i_N)$$
$$(i_k \le i_k',\, k \ne n;\, i_m = i_m', \forall m \ne k) \qquad (A.1)$$

命題1：(25)〜(28)式が成立するもとで，費用配分手法が強単調性を満たす場合には，$L_n(i_n) - R_n(i_n)$はi_nに関して非減少である.

証明：(1),(2)式より次式が成立する.

$$L_n(i_n) - R_n(i_n) = [l_n(i_n) - r_n(i_n)]$$
$$+\beta \sum_{j_n=i_n}^{s+1} p_n(j_n \mid i_n)\phi_n(0,..,j_n,..,0) - \beta\phi_n(0,0,..0) \qquad (A.2)$$

(26)式より(A.2)式の右辺第一項はi_nに関して非減少であり，第三項はi_nに関して不変である．(28)式より，$\phi_n(0,\ldots,i_n,\ldots,0)$が$i_n$に関して非減少であれば，$L_n(i_n) - R_n(i_n)$は$i_n$に関して非減少である．よって，$\phi_n(0,\ldots,i_n,\ldots,0)$が$i_n$に関して非減少であれば命題が証明される．ここに，費用配分手法が強単調性を満たせば，$C(S \cup n; I) - C(S; I)$がi_nに関して非減少であることと$\phi_n(0,\ldots,i_n,\ldots,0)$が$i_n$に関して非減少であることとは等価である．よって，以下では，次式の成立を証明する.

$$C(S;I) - C(S \vee n; I) \le C(S;I') - C(S \vee n; I')\ (\forall S, n \in S) \qquad (A.3)$$
$$I=(i_1,\ldots,i_n,\ldots,i_N),\, I''=(i_1'',\ldots,i_n'',\ldots,i_N''),\, (i_n \le i_n'', i_m = i_m''; \forall m \ne n)$$

以下では，動的計画問題を数値的に解く逐次近似法を用いた求解のプロセスを用いて証明する．逐次近似法の詳細については例えば三根ら[10]を参照されたいが，その概要は，初期値を適当に与え，その値を逐次更新していき，値を収束させることで解を求める方法である．以下では，値の更新のステップ数をtで表し，初期値として$\phi_n^0(I)$をi_nに関して非減少となるように与える．

(3)式より，$C^t(S\backslash n;I)$はi_nに関して不変である．つまり，次式が成立する．

$$C^t(S\backslash n;I)=C^t(S\backslash n;I') \tag{A.4}$$

ここで，$C^0(S;I)>C^0(S;I')$であるとする．つまり，次式が成立しているとする．

$$C^0(S;I)>\sum_{n\in M_S(I'')}R_n^0(i_n'')+\sum_{n\in S\backslash M_S(I'')}L_n^0(i_n'')-u(M_S(I'')) \tag{A.5}$$

(25)式より$r_n(i_n)$, $l_n(i_n)$はともにi_nに関して非減少であり，$\phi_n^0(I)$はi_nに関して非減少であることから次式を得る．

$$\begin{aligned}&\sum_{n\in M_S(I'')}R_n^0(i_n'')+\sum_{n\in S\backslash M_S(I'')}L_n^0(i_n'')-u(M_S(I''))\\ \geq&\sum_{n\in M_S(I'')}R_n^0(i_n)+\sum_{n\in S\backslash M_S(I'')}L_n^0(i_n)-u(M_S(I''))\end{aligned} \tag{A.6}$$

(A.5),(A.6)式より，次式を得る．

$$C^0(S;I)>\sum_{n\in M_S(I'')}R_n^0(i_n)+\sum_{n\in S\backslash M_S(I'')}L_n^0(i_n)-u(M_S(I'')) \tag{A.7}$$

これは，(3)式に基づく費用関数の定義に反する．よって，次式が成立していなければならない．

$$C^0(S;I)\leq C^0(S;I') \tag{A.8}$$

$t=0$とした(A.4)式および(A.8)式より，次式が成立する．

$$C^0(S;I)-C^0(S\backslash n;I)\leq C^0(S;I')-C^0(S\backslash n;I')\ (\forall S,\ n\in S) \tag{A.9}$$

費用配分手法が強単調性を満たすことと(A.9)式より，費用関数C^0に基づいて配分される費用$\phi_n^1(I)$はi_nに関して非減少となる．よって，以上の議論を値が収束するまで繰り返すことで，(A.3)式を得る．

【証明終】

命題2：(25)～(28)式が成立するもとで，費用配分手法が強単調性を満たし，かつ，uが凸性を満たす場合，$M_S(I)\subset M_S(I')$である．

証明：$M_S(I)=B_1\cup B_2$, $M_S(I')=B_1\cup B_3$, $B_4=S\backslash B_1\backslash B_2\backslash B_3$とおく．ただし，任意の$i,j\ (i<j)$に関して$B_i\cap B_j=\emptyset$である．以下では，$M_S(I')$に$B_2$が含まれないことが矛盾であることを示して命題を証明する．(3)式より次式が成立する．

$$\begin{aligned}C(S;I)=&\sum_{n\in B_1\cup B_2}R_n(i_n)+\sum_{n\in B_3\cup B_4}L_n(i_n)-u(B_1\cup B_2)\\ \leq&\sum_{n\in B_1}R_n(i_n)+\sum_{n\in B_2\cup B_3\cup B_4}L_n(i_n)-u(B_1)\end{aligned} \tag{A.10}$$

(A.10)式より次式を得る．

$$\sum_{n\in B_2}[R_n(i_n)-L_n(i_n)]-u(B_1\cup B_2)+u(B_1)\leq 0 \tag{A.11}$$

i) $k\in B_1\cup B_3$のとき

$i_k\leq i_k'$, $i_m=i_m'\ (\forall m\neq k)$に留意すると，次式を得る．

$$\begin{aligned}C(S;I')=&\sum_{n\in B_1\cup B_3}R_n(i_n)+\sum_{n\in B_2\cup B_4}L_n(i_n)\\ &+[R_k(i_k')-R_k(i_k)]-u(B_1\cup B_3)\end{aligned} \tag{A.12}$$

ここで，(A.12)式の右辺に(A.11)式を加えると次式を得る．

$$\begin{aligned}C(S;I')\geq&\sum_{n\in B_1\cup B_2\cup B_3}R_n(i_n)+\sum_{n\in B_4}L_n(i_n)+[R_k(i_k')-R_k(i_k)]\\ &-u(B_1\cup B_3)-u(B_1\cup B_2)+u(B_1)\end{aligned} \tag{A.13}$$

uが凸性を満たすことと，$i_k\leq i_k'$, $i_m=i_m'\ (\forall m\neq k)$に留意すると，(A.13)式から次式が導かれる．

$$\begin{aligned}C(S;I')\geq&\sum_{n\in B_1\cup B_2\cup B_3}R_n(i_n)+\sum_{n\in B_4}L_n(i_n)\\ &+[R_k(i_k')-R_k(i_k)]-u(B_1\cup B_2\cup B_3)\\ =&\sum_{n\in B_1\cup B_2\cup B_3}R_n(i_n')+\sum_{n\in B_4}L_n(i_n')-u(B_1\cup B_2\cup B_3)\end{aligned} \tag{A.14}$$

上式は，(3)式に基づく費用関数$C(S;I')$の定義に反しており，$M_S(I')$には少なくてもB_2が含まれていなければならないことを示している．

ii) $k\in B_2$のとき

$i_k \le i_k', i_m = i_m'$ $(\forall m \ne k)$に留意すると次式を得る．

$$C(S;I') = \sum_{n\in B_1\cup B_3} R_n(i_n) + \sum_{n\in B_2\cup B_4} L_n(i_n) + [L_k(i_k') - L_k(i_k)] - u(B_1\cup B_3) \tag{A.15}$$

ここで，(A.15)式の右辺に(A.11)式を加えると次式を得る．

$$C(S;I') \ge \sum_{n\in B_1\cup B_2\cup B_3} R_n(i_n) + \sum_{n\in B_4} L_n(i_n) + [L_k(i_k') - L_k(i_k)] - u(B_1\cup B_3) - u(B_1\cup B_2) + u(B_1) \tag{A.16}$$

uが凸性を満たすこと，命題1より $L_k(i_k') - R_k(i_k') \ge L_k(i_k) - R_k(i_k)$が成立すること，および，$i_k \le i_k', i_m = i_m'$ $(\forall m \ne k)$に留意すると，次式を得る．

$$\begin{aligned} &\sum_{n\in B_1\cup B_2\cup B_3} R_n(i_n) + \sum_{n\in B_4} L_n(i_n) + [L_k(i_k') - L_k(i_k)] \\ &- u(B_1\cup B_3) - u(B_1\cup B_2) + u(B_1) \\ \ge &\sum_{n\in B_1\cup B_2\cup B_3} R_n(i_n) + \sum_{n\in B_4} L_n(i_n) + [R_k(i_k') - R_k(i_k)] \\ &- u(B_1\cup B_2\cup B_3) \\ = &\sum_{n\in B_1\cup B_2\cup B_3} R_n(i_n') + \sum_{n\in B_4} L_n(i_n') - u(B_1\cup B_2\cup B_3) \end{aligned} \tag{A.17}$$

上式は，(3)式に基づく費用関数$C(S;I')$の定義に反しており，$M_S(I')$には少なくても B_2が含まれていなければならないことを示している．

iii) $k \in B_4$のとき

ii)と同様の議論により，(A.16)式を得る．u が凸性を満たすこと，および，$i_k \le i_k', i_m = i_m'$ $(\forall m \ne k)$に留意すると，(A.16)式より次式が導かれる．

$$\begin{aligned} C(S;I') \ge &\sum_{n\in B_1\cup B_2\cup B_3} R_n(i_n) + \sum_{n\in B_4} L_n(i_n) + [L_k(i_k') - L_k(i_k)] \\ &- u(B_1\cup B_3) - u(B_1\cup B_2) - u(B_1) \\ \ge &\sum_{n\in B_1\cup B_2\cup B_3} R_n(i_n') + \sum_{n\in B_4} L_n(i_n') - u(B_1\cup B_2\cup B_3) \end{aligned} \tag{A.18}$$

上式は，(3)式に基づく費用関数$C(S;I')$の定義に反しており，$M_S(I')$には少なくても B_2が含まれていなければならないことを示している．

i)〜iii)より，$M_S(I) \subset M_S(I')$である．

【証明終】

命題3：uが凸性を満たす場合，$M_T(I) \subset M_S(I)$, $(\forall T \subset S)$である．

証明：$M_T(I) = B_1 \cup B_2$, $M_S(I) = B_1 \cup B_3$, $B_4 = T\setminus B_1\setminus B_2$, $B_5 = S\setminus B_1\setminus B_3$とおく．ただし，$(i,j) = (2,5), (3,4), (4,5)$を除く任意の$i,j$ $(i<j)$に関して$B_i \cap B_j = \varnothing$である．以下では，$M_S(I)$に$B_2$が含まれないことが矛盾であることを示して命題を証明する．(3)式より，次式が成立する．

$$\begin{aligned} C(T;I) &= \sum_{n\in B_1\cup B_2} R_n(i_n) + \sum_{n\in B_4} L_n(i_n) - u(B_1\cup B_2) \\ &\le \sum_{n\in B_1} R_n(i_n) + \sum_{n\in B_2\cup B_4} L_n(i_n) - u(B_1) \end{aligned} \tag{A.19}$$

(A.19)式より次式を得る．

$$\sum_{n\in B_2} [R_n(i_n) - L_n(i_n)] - u(B_1\cup B_2) + u(B_1) \le 0 \tag{A.20}$$

ところで，$C(S;I)$は次式で与えられる．

$$C(S;I) = \sum_{n\in B_1\cup B_3} R_n(i_n) + \sum_{n\in B_5} L_n(i_n) - u(B_1\cup B_3) \tag{A.21}$$

(A.21)式に(A.20)式を加えるとともに，u が凸性を満たすことから次式が得られる．

$$\begin{aligned} C(S;I) \ge &\sum_{n\in B_1\cup B_2\cup B_3} R_n(i_n) + \sum_{n\in B_5\setminus B_2} L_n(i_n) \\ &- u(B_1\cup B_3) - u(B_1\cup B_2) + u(B_1) \\ \ge &\sum_{n\in B_1\cup B_2\cup B_3} R_n(i_n) + \sum_{n\in B_5\setminus B_2} L_n(i_n) - u(B_1\cup B_2\cup B_3) \end{aligned} \tag{A.22}$$

上式は $C(S;I)$の定義に反しており，$M_S(I)$には少なくても B_2が含まれなければならないことを示している．よって$M_T(I) \subset M_S(I)$である．

【証明終】

命題 4：(25)〜(28)式が成立するもとで，u が凸性を満たしているとき，次式が成立する．

$$C(S;I) - C(S\setminus h;I) \ge C(S;I') - C(S\setminus h;I') \quad (\forall S,\ h\in S) \tag{A.23}$$

証明：命題1,2,3より，$M_{S\setminus h}(I) = B_1, M_S(I) = B_1 \cup B_2, M_{S\setminus h}(I') = B_1 \cup B_3, M_S(I') = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$と表すことができる．ただし，$(i,j) = (2,3)$を除く任意の i,j $(i<j)$に関して $B_i \cap B_j = \varnothing$である．また，$B_5 = S\setminus B_1\setminus B_2\setminus B_3\setminus B_4$と表す．これらの表記方法を用いると費用関数はそれぞれ次式のように表される．

$$C(S;I') = \sum_{n\in B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4} R_n(i_n') + \sum_{n\in B_5} L_n(i_n') - u(B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4) \tag{A.24}$$

$$C(S\setminus h;I') = \sum_{n\in B_1\cup B_3} R_n(i_n') + \sum_{n\in(B_2\setminus B_3\cup B_4\cup B_5)\setminus h} L_n(i_n') - u(B_1\cup B_3) \tag{A.25}$$

$$C(S;I) = \sum_{n\in B_1\cup B_2} R_n(i_n) + \sum_{n\in(B_3\setminus B_2)\cup B_4\cup B_5} L_n(i_n) - u(B_1\cup B_2) \tag{A.26}$$

$$C(S\setminus h;I) = \sum_{n\in B_1} R_n(i_n) + \sum_{n\in(B_2\cup B_3\cup B_4\cup B_5)\setminus h} L_n(i_n) - u(B_1) \tag{A.27}$$

(A.24), (A.25)式より，次式を得る．

$$C(S;I') - C(S\setminus h;I') = \sum_{n\in B_2\setminus B_3\cup B_4} R_n(i_n') - \sum_{n\in(B_2\setminus B_3\cup B_4)\setminus h} L_n(i_n') - u(B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4) + u(B_1\cup B_3) \tag{A.28}$$

同様に，(A.26), (A.27)式より，次式を得る．

$$C(S;I) - C(S\setminus h;I) = \sum_{n\in B_2} R_n(i_n) - \sum_{n\in B_2\setminus h} L_n(i_n) - u(B_1\cup B_2) + u(B_1) \tag{A.29}$$

i) $k\in B_2\backslash B_3$のとき

$i_k\le i_k'$, $i_m=i_m'$ $(k\ne h, \forall m\ne k)$に留意すると，(A.28)式は次式のように表すことができる．

$$\begin{aligned} C(S;I') - C(S\setminus h;I') &= \sum_{n\in B_2\setminus B_3\cup B_4} R_n(i_n) - \sum_{n\in(B_2\setminus B_3\cup B_4)\setminus h} L_n(i_n) \\ &+ [R_k(i_k') - R_k(i_k)] - [L_k(i_k') - L_k(i_k)] \\ &- u(B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4) + u(B_1\cup B_3) \end{aligned} \tag{A.30}$$

(A.30)式から(A.29)式を引くことで次式を得る．

$$\begin{aligned} &\sum_{n\in B_4} [R_n(i_n) - L_n(i_n)] - \sum_{n\in B_2\cap B_3} [R_n(i_n) - L_n(i_n)] \\ &+ [R_k(i_k') - R_k(i_k)] - [L_k(i_k') - L_k(i_k)] \\ &- u(B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4) + u(B_1\cup B_3) \\ &+ u(B_1\cup B_2) - u(B_1) \end{aligned} \tag{A.31}$$

命題1より $L_k(i_k') - R_k(i_k') \ge L_k(i_k) - R_k(i_k)$が成立することから次式を得る．

$$\begin{aligned} &\sum_{n\in B_4} [R_n(i_n) - L_n(i_n)] - \sum_{n\in B_2\cap B_3} [R_n(i_n) - L_n(i_n)] \\ &+ [R_k(i_k') - R_k(i_k)] - [L_k(i_k') - L_k(i_k)] \\ &- u(B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4) + u(B_1\cup B_3) \\ &+ u(B_1\cup B_2) - u(B_1) \\ &\le \sum_{n\in B_4} [R_n(i_n) - L_n(i_n)] - \sum_{n\in B_2\cap B_3} [R_n(i_n) - L_n(i_n)] \\ &- u(B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4) + u(B_1\cup B_3) \\ &+ u(B_1\cup B_2) - u(B_1) \end{aligned} \tag{A.32}$$

ここで，$C(S;I')$の定義より次式を得る．

$$\begin{aligned} C(S;I') &= \sum_{n\in B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4} R_n(i_n') + \sum_{n\in B_5} L_n(i_n') \\ &- u(B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4) \\ &\le \sum_{n\in B_1\cup B_2\cup B_3} R_n(i_n') + \sum_{n\in B_4\cup B_5} L_n(i_n') - u(B_1\cup B_2\cup B_3) \end{aligned} \tag{A.33}$$

(A.33)式より，次式を得る．

$$\begin{aligned} &- \sum_{n\in B_4} [R_n(i_n') - L_n(i_n')] \\ &+ u(B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4) - u(B_1\cup B_2\cup B_3) \ge 0 \end{aligned} \tag{A.34}$$

ここで，$k\notin B_4$より次式が成立する．

$$- \sum_{n\in B_4} [R_n(i_n') - L_n(i_n')] = - \sum_{n\in B_4} [R_n(i_n) - L_n(i_n)] \tag{A.35}$$

すると，(A.34), (A.35)式より，次式を得る．

$$\begin{aligned} &- \sum_{n\in B_4} [R_n(i_n) - L_n(i_n)] \\ &+ u(B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4) - u(B_1\cup B_2\cup B_3) \ge 0 \end{aligned} \tag{A.36}$$

また，$C(S\backslash h;I)$の定義より次式を得る．

$$\begin{aligned} C(S\setminus h;I) &= \sum_{n\in B_1} R_n(i_n) + \sum_{n\in(B_2\cup B_3\cup B_4\cup B_5)\setminus h} L_n(i_n) - u(B_1) \\ &\le \sum_{n\in B_1\cup(B_2\cap B_3)} R_n(i_n) + \sum_{n\in(B_2\setminus B_3\cup B_3\setminus B_2\cup B_4\cup B_5)\setminus h} L_n(i_n) \\ &- u(B_1\cup(B_2\cap B_3)) \end{aligned} \tag{A.37}$$

(A.37)式より次式を得る．

$$\sum_{n\in B_2\cap B_3} [R_n(i_n) - L_n(i_n)] - u(B_1\cup(B_2\cap B_3)) + u(B_1) \ge 0 \tag{A.38}$$

(A.32)式の右辺に (A.34), (A.38)式のそれぞれの左辺を加えると，次式を得る．

$$
\begin{aligned}
&= -u(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) + u(B_1 \cup B_3) \\
&\quad + u(B_1 \cup B_2) - u(B_1) + u(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) \\
&\quad - u(B_1 \cup B_2 \cup B_3) - u(B_1 \cup (B_2 \cap B_3)) + u(B_1) \qquad \text{(A.39)} \\
&= u(B_1 \cup B_3) + u(B_1 \cup B_2) - u(B_1 \cup B_2 \cup B_3) \\
&\quad - u(B_1 \cup (B_2 \cap B_3))
\end{aligned}
$$

ここに，(A.34), (A.38)式の左辺がともに非負であることより，(A.32)式の右辺は(A.39)式よりも小さく，また，uが凸性を満たすことから(A.39)式は 0 よりも小さいことから，(A.32)式の右辺は少なくても 0 より小さい．すなわち，(A.31)式は 0 よりも小さい．よって，(A.23)式が成立する．

ii) $k \in B_4$のとき

i)と同様の議論により，(A.31)式を得る．ここで，$i_k \leq i_k'$, $i_m = i_m'$ $(k \neq h, \forall m \neq k)$に留意すると，$k \in B_4$より，(A.34)式は次式と等価である．

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{n \in B_4}[R_n(i_n) - L_n(i_n)] - [R_n(i_n') - R_n(i_n)] + [L_n(i_n') - L_n(i_n)] \\
&+ u(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) - u(B_1 \cup B_2 \cup B_3) \geq 0
\end{aligned}
\qquad \text{(A.40)}
$$

(A.31)式に (A.38), (A.40)式のそれぞれの左辺を加えると，(A.39)式が導出できる．よって以後，i)と同様の議論により，(A.23)式が成立する．

iii) i), ii)以外のとき

(A.28)式から(A.29)式を引くと(A.32)式の右辺が得られる．よって，i)と同様の議論により(A.23)式が成立する．

【証明終】

命題 4 より，(25)〜(28)式が成立するもとで，費用配分手法が強単調性を満たし，かつ，u が凸性を満たしていれば，(A.23)式が成立する．(A.23)式が成立していれば(24)式は十分成立する．すなわち，(23)式が成立する．よって，定理 3 が証明された．

参考文献

1) Wang, H.: A Survey of Maintenance Policies of Deteriorating Systems, European Journal of Operational Research 139, pp.469-489, 2002.

2) Cho, D. I., and Parlar, M.: A Survey of Maintenance Models for Multi-unit Systems, European Journal of Operational Research 51, pp.1-23, 1991.

3) Young, H.P., Cost Allocation. Handbook of Game Theory, Theory with Economic Applications (Volume 2). Edited by R.J. Aumann and S. Hart, North-Holland Publishers, pp. 1193-1235,1994.

4) Moulin, H.: Axiomatic Cost and Surplus Sharing, in Arrow, K. J., Sen, A. K., and Suzumura K. (eds), Handbook of Social Choice and Welfare Volume1, North-Holland, pp.289-357, 2002.

5) Petrosjan, L. and Zaccour, G.: Time-consistent Shapley Value Allocation of Pollution Cost Reduction, Journal of Economic Dynamics and Control 27, pp.381-398, 2003.

6) Germain, M., Toint, P., Tulkens, H., and de Zeeuw, A.: Transfers to Sustain Dynamic Core-theoretic Cooperation in International Stock Pollutant Control, Journal of Economic Dynamics and Control 28, pp.79-99, 2003.

7) Myerson, R.B.: Game Theory: Analysis of Conflict, Harvard University Press, 1997.

8) Shapley, L. S.: A Value for n-person games, in Kuhn, H.W. and Tucker, A. W., Contribution to the Theory of Games I, pp.307-317, 1953.

9) Young, H. P.: Monotonic Solutions of Cooperative Games, International Journal of Game Theory 14, No.2, pp.65-72, 1985.

10) 三根久，河合一：信頼性・保全性の数理，朝倉書店，1982.

11) 鈴木光男：新ゲーム理論，勁草書房，1994.

12) Shapley, L. S.: Cores of Convecx Games, International Journal of Game Theory 1, No.1, pp11.26, 1971.

13) Tanimoto, K.: Cost Allocation in Joint Replacement for Multi-State Deteriorating Systems, Proc. of the 2005 IEEE Int. Conf. on Systems, Man and Cybernetics, CD-ROM, 2005. (forthcoming)

COOPERATIVE GAME THEORETIC APPROACH TO JOINT REPLACEMENT FOR ENVIRONMENTAL MANAGEMENT SYSTEMS

Keishi TANIMOTO

We study on the problem of allocation of cost incurred by owners of environmental management systems. We design the cost allocation mechanism using a dynamic cooperative game of joint replacement of the systems. We find that the game is characterized by the instantaneous cost saving function. We suggest that the cost allocation method must satisfy several axioms such as additivity and dummy in this context. As a result, the class of additive cost methods is usuful. Especially, Shapley value is the most useful because it satisfies all axioms and holds the core if the game is convex.