

(21) 環境の識別と情報量に関する一考案

STUDY ON THE RELATION BETWEEN DISCRIMINATION
OF ENVIRONMENT AND AMOUNT OF INFORMATION

植野和文*

Kazufumi UENO*

ABSTRACT ; We have to judge the condition of the environment around us to keep our life from danger. The environment is such abstract conception that we cannot observe it directly to judge its condition. We need observe several phenomena happening around us to estimate the condition. Indexes of environment are tools to grasp the phenomena and to describe their conditions. The contents of indexes are regarded as messages from the environment to observers. They try to receive as many messages as possible to judge the condition more correctly. The degree of contribution to correctness is amount of information carried by the message. Important indexes are those which send messages conveying large amount of information to the observer.

This paper stands on recognition above to aim at analysing the role of indexes in discrimination of environment.

KEYWORDS ; Discrimination , Environment , Index , Information

1. はしがき

日常生活を営む上で最も基本的かつ重要な問題は、周囲の環境が安全な状態にあるのか、それとも危険な状態にあるのかという判断である。環境という概念は非常に抽象的なものであり、それ自体を直接観察して状態を判断することはできない。そこで、身近で起こる様々な現象を観察することによって環境の状態を推測することになる。環境指標は、こう言った現象を把握し、記述するための道具であり、指標の状態は環境が指標を通じて観察者に送るメッセージである。観察者は、少しでも多くのメッセージを集めて環境の状態をより正確に判断しようとする。この正しい判断への貢献度がメッセージのもつ情報量であり、大きな情報量をもつメッセージを提供してくれる指標が環境指標として重要なのである。

本研究では、以上のような認識に立ち、情報量の観点から環境の識別における指標の役割について考察する。

2. モデル化

2. 1 情報の定義

ここでは、観察者による環境の識別問題の解決という観点から情報の定義を行うとともに、情報と密接にかかわる概念として指標とメッセージを定義する。

情報 ; 環境の状態が不明確なとき、その状態を分類し、他の可能な状態から区別してその状態をより明確にするもの

指標 ; 環境の状態を記述するもの 例) オキシダント濃度

メッセージ ; 指標の記述内容 例) 20 ppm

* 兵庫県企画部 , Counsellor's Room, Planning Dep., Hyogo Pref. Govn.

2. 2 モデルの仮定

本研究では、メッセージを用いた環境の識別問題を逐次決定分析として捉えるため、以下のような仮定を設定する。

- (1) 環境の状態は、「安全」か「危険」かのいずれかである。
- (2) メッセージは各指標ごとに2種類である。例えば指標がオキシダント濃度の場合、メッセージは、「20ppm以上」か「20ppm以下」のいずれかである。
- (3) 観察者は、過去の経験や習得した知識に基づいて危険な状態と安全な状態の標準像をつくり上げており、それぞれの状態におけるメッセージの出現頻度を知っている。
- (4) 観察者は、メッセージを知ることによって環境の状態に対する確信を形成し、例えば、確信が0.8を越えれば「安全」、0.2を下回れば「危険」と判断する。0.2～0.8の範囲では判断を保留して、さらにメッセージを集める。
- (5) 観察者は、観察を始める時点で環境がそれぞれの状態である確信(事前確信)を予め形成している。

2. 3 情報量の定義

メッセージを知ることにより得られる情報量の期待値を指標の情報量として以下のように定義する。

まず、ここで用いる記号をつぎのように定める。

θ_i ; 環境の状態 ($i=1, 2$) M_j ; メッセージ ($j=1, 2$)

e_i ; 環境の状態が θ_i であるという観察者の確信

$\lambda = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$; 指標の情報行列、 $p_i + q_i = 1$ ($i=1, 2$)

ここに、 p_i ; 環境の状態が θ_i の場合、メッセージ M_1 の出現頻度

q_i ; 同じくメッセージ M_2 の出現頻度

このとき、メッセージを知る前の環境の状態に関する曖昧さは、

$$H = -(e_1 \log e_1 + e_2 \log e_2) \quad (1)$$

で与えられる。メッセージを知って修正された確信を e_1' 、 e_2' とすると、ベイズの定理より、

メッセージが M_1 のとき

$$e_1' = \frac{e_1 p_1}{e_1 p_1 + e_2 p_2} \quad (2) \quad e_2' = \frac{e_2 p_2}{e_1 p_1 + e_2 p_2} \quad (3)$$

メッセージが M_2 のとき

$$e_1' = \frac{e_1 q_1}{e_1 q_1 + e_2 q_2} \quad (4) \quad e_2' = \frac{e_2 q_2}{e_1 q_1 + e_2 q_2} \quad (5)$$

したがって、メッセージを知った後の曖昧さの期待値は、

$$H' = -\left(e_1 p_1 \log \frac{e_1 p_1}{e_1 p_1 + e_2 p_2} + e_2 p_2 \log \frac{e_2 p_2}{e_1 p_1 + e_2 p_2}\right) - \left(e_1 q_1 \log \frac{e_1 q_1}{e_1 q_1 + e_2 q_2} + e_2 q_2 \log \frac{e_2 q_2}{e_1 q_1 + e_2 q_2}\right) \quad (6)$$

指標のもつ情報量(I)は、メッセージを知る前後の曖昧さの減少量として次式で定義される。

$$I = H - H'$$

$$= e_1 \left(p_1 \log \frac{p_1}{e_1 p_1 + e_2 p_2} + q_1 \log \frac{q_1}{e_1 q_1 + e_2 q_2} \right) + e_2 \left(p_2 \log \frac{p_2}{e_1 p_1 + e_2 p_2} + q_2 \log \frac{q_2}{e_1 q_1 + e_2 q_2} \right) \quad (7)$$

この情報量は非負で、かつ H を越えないことが知られている。つまり、指標を調べれば、期待値として曖昧さは増加することはない、確信は弱くなることはない。

3. 情報量の性質

情報量(I)は式(7)で示されるように、指標の情報行列と観察者の確信によって規定される。前者は観察者がどの指標を利用するか、後者は、観察者がどの程度の確信で指標を利用するかという問題にそれぞれ対応する。

3. 1 指標の性質と情報量

指標の性質とは、この場合、情報行列の構造すなわち、 p_1 と p_2 の大きさで表現される。

まず、 $p_1 \geq p_2$ となるようにメッセージを決めることにする。これによって、モデルの一般性が失われることはない。ここで、

$$p_1 = p_2 + k \quad (0 \leq k \leq 1 - p_2) \quad (8)$$

とおくと、式(7)は

$$I(k, p_2, e_1, e_2) = e_1 \left\{ (p_2 + k) \log \frac{p_2 + k}{p_2 + ke_1} + (q_2 - k) \log \frac{q_2 - k}{q_2 - ke_1} \right\} \\ + e_2 \left\{ p_2 \log \frac{p_2}{p_2 + ke_1} + q_2 \log \frac{q_2}{q_2 - ke_1} \right\} \quad (9)$$

このとき、

$$\partial I / \partial k = e_1 \log \frac{(p_2 + k)(q_2 - ke_1)}{(p_2 + ke_1)(q_2 - k)} > 0 \quad (10)$$

$$\partial^2 I / \partial k^2 = \frac{e_1 e_2}{\ln 2} \left\{ \frac{p_2}{(p_2 + k)(p_2 + ke_1)} + \frac{q_2}{(q_2 - k)(q_2 - ke_1)} \right\} > 0 \quad (11)$$

$$I(0) = 0 \quad (12)$$

$$I(1 - p_2) = e_2(p_2 \log p_2 - q_2 \log e_2) - (e_1 + e_2 p_2) \log(e_1 + e_2 p_2) \leq -(e_1 \log e_1 + e_2 \log e_2) \quad (13)$$

$$I'(0) = 0 \quad (14) \quad I'(1 - p_2) = +\infty \quad (15)$$

以上より、 $I(k)$ の関数形は図1のようになる。 $\partial I / \partial k$ は k の限界情報量であり、以下、MI (Marginal Infomation)で表わす。

つぎに、

$$\partial I / \partial p_2 = e_1 \log \frac{p_2 + k}{1 - (p_2 + k)} + e_2 \log \frac{p_2}{1 - p_2} - \log \frac{p_2 + ke_1}{1 - (p_2 + ke_1)} \quad (16)$$

$$\partial^2 I / \partial p_2^2 = e_1 e_2 k^2 \left\{ \frac{1}{p_2(p_2 + k)(p_2 + ke_1)} + \frac{1}{(1 - p_2)(1 - p_2 - k)(1 - p_2 - ke_1)} \right\} > 0 \quad (17)$$

$$\lim_{p_2 \rightarrow 0} \partial I / \partial p_2 = -\infty \quad (18)$$

$$\lim_{p_2 \rightarrow 1 - k} \partial I / \partial p_2 = +\infty \quad (19)$$

$$I(0) = e_1(1 - k) \log(1 - k) - ke_1 \log e_1 - (1 - ke_1) \log(1 - ke_1) \quad (20)$$

$$I(1 - k) = e_2(1 - k) \log(1 - k) - ke_2 \log e_2 - (1 - ke_2) \log(1 - ke_2) \quad (21)$$

以上より、 $I(p_2)$ の関数形は図2のようになる。

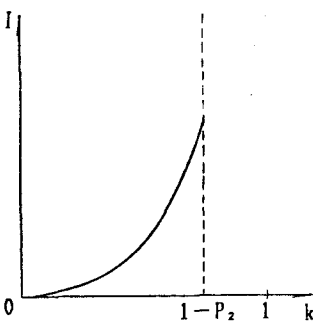


図-1

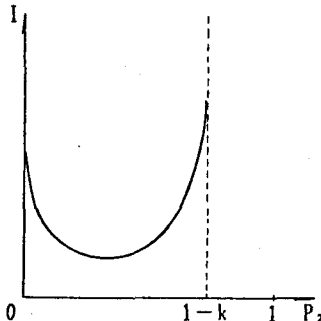


図-2

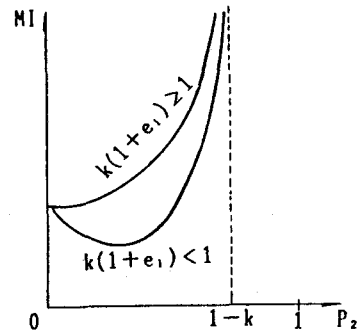


図-3

さらに、

$$\partial MI / \partial p_2 = \frac{e_1}{\ln 2} \left(\frac{1}{p_2 + k} + \frac{1}{q_2 - k} - \frac{1}{p_2 + ke_1} - \frac{1}{q_2 - ke_1} \right) \quad (22)$$

$$\partial^2 MI / \partial p_2^2 = \frac{e_1}{\ln 2} \left\{ \frac{1}{(p_2 + ke_1)^2} - \frac{1}{(p_2 + k)^2} + \frac{1}{(q_2 - k)^2} - \frac{1}{(q_2 - ke_1)^2} \right\} > 0 \quad (23)$$

$$MI(0) = e_1 \log \frac{1 - ke_1}{e_1(1 - k)} > 0 \quad (24) \quad MI(1 - k) = +\infty \quad (25)$$

$$MI'(0) = \frac{e_2}{\ln 2} \cdot \frac{k(1 + e_1) - 1}{k(1 - k)(1 - ke_1)} \quad (26)$$

$$k(1 + e_1) \geq 1 \text{ のとき } MI'(0) \geq 0 \quad (27) \quad k(1 + e_1) < 1 \text{ のとき } MI'(0) < 0 \quad (28)$$

$$MI'(1 - k) = +\infty$$

MIが最小になる p_2 を p_2^* とすると、 $\partial MI / \partial p_2 = 0$ より

$$p_2^* = \frac{1 - k(1 + e_1)}{2} \quad (30)$$

このとき、MIの最小値 MI^* は、

$$MI^* = 2e_1 \log \frac{1 + ke_2}{1 - ke_2} \quad (31)$$

以上より、 $MI(p_2)$ の関数形は図3のようになる。

3. 2 確信と情報量

$e_2 = 1 - e_1$ とおくと、式(7)は

$$I(e_1, p_1, p_2) = e_1 \left\{ p_1 \log \frac{p_1}{e_1(p_1 - p_2) + p_2} + q_1 \log \frac{q_1}{e_1(q_1 - q_2) + q_2} \right\} \\ + (1 - e_1) \left\{ p_2 \log \frac{p_2}{e_1(p_1 - p_2) + p_2} + q_2 \log \frac{q_2}{e_1(q_1 - q_2) + q_2} \right\} \quad (32)$$

このとき、

$$\partial I / \partial e_1 = \left\{ p_1 \log \frac{p_1}{e_1(p_1 - p_2) + p_2} + q_1 \log \frac{q_1}{e_1(q_1 - q_2) + q_2} \right\} \\ - \left\{ p_2 \log \frac{p_2}{e_1(p_1 - p_2) + p_2} + q_2 \log \frac{q_2}{e_1(q_1 - q_2) + q_2} \right\} \quad (33)$$

$$\partial^2 I / \partial e_1^2 = -\frac{1}{\ln 2} \left\{ \frac{(p_1 - p_2)^2}{e_1(p_1 - p_2) + p_2} + \frac{(q_1 - q_2)^2}{e_1(q_1 - q_2) + q_2} \right\} < 0 \quad (34)$$

$$I(0) = I(1) = 0 \quad (35)$$

$$I'(0) = p_1 \log \frac{p_1}{p_2} + q_1 \log \frac{q_1}{q_2} > 0 \quad (36)$$

$$I'(1) = -\left(p_2 \log \frac{p_2}{p_1} + q_2 \log \frac{q_2}{q_1} \right) < 0 \quad (37)$$

以上より、 $I(e_1)$ の関数形は図4のようになる。

つぎに、確信と限界情報量の関係を見ると

$$\partial MI / \partial e_1 = \log \frac{(p_2 + k)(q_2 - ke_1)}{(p_2 + ke_1)(q_2 - k)} - \frac{ke_1}{(\ln 2)(p_2 + ke_1)(q_2 - ke_1)} \quad (38)$$

$$\partial^2 MI / \partial e_1^2 = -\frac{k}{\ln 2} \left\{ \frac{1}{(p_2 + ke_1)(q_2 - ke_1)} + \frac{p_2 q_2 + k^2 e_1^2}{(p_2 + ke_1)^2 (q_2 - ke_1)^2} \right\} < 0 \quad (39)$$

$$MI'(0) = \log \frac{(p_2 + k)q_2}{p_2(q_2 - k)} > 0 \quad (40)$$

$$MI'(1) = -\frac{k}{(\ln 2)(p_2 + k)(q_2 - k)} < 0 \quad (41)$$

$$MI(0) = MI(1) = 0 \quad (42)$$

以上より、 $MI(e_1)$ の関数形は図5のようになる。

4. 分析結果と考察

4. 1 指標の性質の効果

ここでは、大気環境の識別を例に前章で行った分析結果の考察を行う。まず、例を次のように設定する。

θ_1 = 安全、 θ_2 = 危険、指標 = オキシダント濃度、 M_1 = 光化学スモッグ警報なし、 M_2 = 同警報あり

安全な状態、危険な状態それぞれの標準像を図6に示す。図中 p_1 、 p_2 はそれぞれ安全な状態、危険な状態においてオキシダント濃度が C^* 以下である確率である。オキシダント濃度が C^* を越えれば警報を発することにすれば p_1 、 p_2 はそれぞれの状態において警報がない確率を表わす。

図1より、 p_1 と p_2 の差が大きくなるにつれ、情報量は急増することが分かる。 k の大きい指標が識別に役立つ。また、何らかの原因で標準像が変化することによって、 k が増減し、同じ指標でも情報量が増減することがある。図7は、安全な状態の標準像がより安全側(C')にシフトした場合を示す。このとき、情報量は増加する。

図2より、 p_1 と p_2 の差が同量であっても p_2 の大きさによって情報量が異なり、それぞれ1、0に近づくほど情報量は大きくなることが分かる。図8は、 k を一定に保ったまま閾値を C^* 、 C''^* へ変化させた場合を示す。

図3より、 p_1 、 p_2 が大きくなるにつれ、 $k(1+e_1) \geq 1$ では、限界情報量は急増するが、 $k(1+e_1) < 1$ では、 p_2^* まで減少した後、急増することが分かる。限界情報量は p_1 と p_2 の差一単位当たりの情報量であり、この値が大きいたちでは、標準像の変化によって生じる情報量の変動が大きい。図8において、 $k(1+e_1) \geq 1$ つまり、 e_1 が大きい範囲では、閾値が C^* の場合よりも閾値が C''^* の場合のほうが標準像の変動の影響を強く受けることになる。

以上の考察から、安全、危険の2つの標準像が与えられたとき、情報量を最大にする C の閾値が存在することが分かる。例えば、環境基準を厳しくしすぎると基準を越えるケースが当り前になってしまい、識別が困難になる。その結果、「基準を越えた」というメッセージが警報にならなくなる。

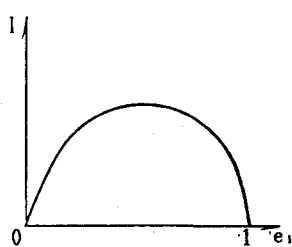


図-4

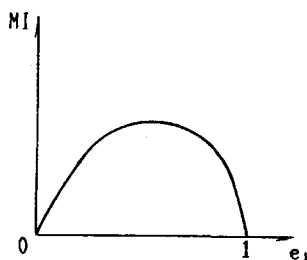


図-5

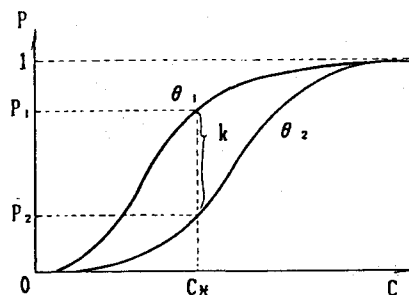


図-6

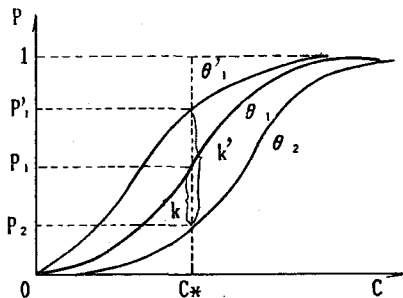


図-7

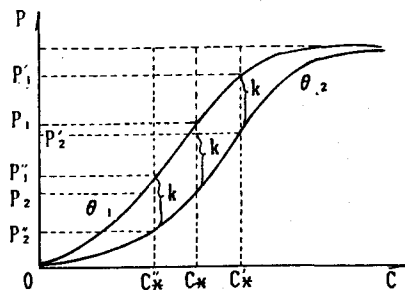


図-8

4. 2 観察者の確信の効果

図4より、 e_i が0か1に近づく、つまり、確信が決定的なものになると情報量は急減し、逆に確信が弱いときに情報量は最大になることが分かる。観察者は、確信を強めるほど確信の修正をしなくなることを示している。

図5より、限界情報量も同様に、確信が決定的なものになると急減し、確信が弱いときに最大になることが分かる。このことは、複数の指標が利用できるときは、 k の大きい指標から先に調べる方が情報量の点からは効率がよいことを示している。

以上の考察から、指標の利用順序によって総情報量が変化すること、つまり、環境の識別の面から最適な利用順序が存在することが分かる。

5. 期待情報量と固有情報量

確信の状態によって情報量が変化するため、式(7)で定義された情報量を用いて指標の有用性を論じることができない。そこで、式(7)を e_i に関して平均化したものを期待情報量としてつぎのように定義する。

$$I_{ex} = \int_0^1 I(e_i) de_i = \frac{1}{2 \ln 2} \left\{ \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{q_1 q_2}{q_1 - q_2} \cdot \ln \frac{q_2}{q_1} + 1 \right\} \quad (43)$$

この期待情報量を用いれば、指標の性質だけから各指標の有用性を比較することができる。

さらに、各指標の期待情報量が環境の識別という面からどの程度の大きさなのかを計る尺度として固有情報量を定義する。 p_1, p_2 がそれぞれの区間(0, 1)で1様に分布している特殊な状態を想定し、そのときの期待情報量を2状態識別問題の固有情報量と呼ぶことにし、次式で定義する。(図9参照)

$$\begin{aligned} I^* &= 1/S \iint_{A_1} I_{ex} dp_1 dp_2 = \frac{2}{\ln 2} \int_0^1 dp_1 \int_0^1 \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} dp_2 + \frac{1}{2 \ln 2} \\ &= \frac{1}{18 \ln 2} \cdot (21 - 2\pi^2) = 0.1026 \dots \end{aligned} \quad (44)$$

このような尺度を3状態、4状態などより次元の高い識別問題でも定義して、それらをユニットとして用いれば、異次元の問題に関しても情報量の大小関係が論じられる。

6. あとがき

本研究は、環境の識別問題に逐次決定分析を応用することにより、確信形成過程における指標の役割を情報量の視点から分析しようとした試論的研究である。分析を行うに当たっては、多くの仮定を設けており現実の問題にそのまま適用できるものではない。しかし、環境指標の在り方を情報量の視点から再考し、その有用性を評価するための理論的基礎づけを行うことができたと言えよう。得られた知見をまとめるとつぎのようである。

- ・ 指標の有用性(情報量)は、指標の性質だけでなく観察者の確信にも影響される。
- ・ 指標の利用順序によって総情報量は異なる。環境の識別の面から指標の最適な利用順序が存在する。
- ・ 閾値の設定が指標の有用性に大きく影響する。環境の識別の面から最適な閾値が存在する。

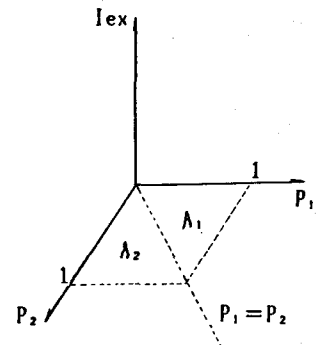


図-9

[参考文献]

- 宮沢光一 「情報・決定理論序説」 岩波書店 1976
松原 望 「意志決定の基礎」 朝倉書店 1983