

有限要素法による水質汚濁解析シミュレーション・システムの開発について

運輸省第三港湾建設局 溝口 正仁, 岩崎三日子
日本アイ・ビー・エム ○松田 安弘, 野田 誠二

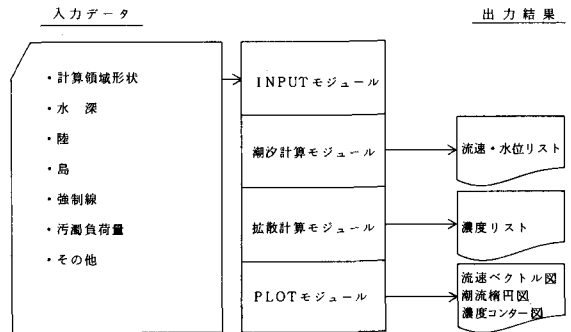
1. ま え が き

水質汚濁シミュレーションの内容は、大きく、潮汐計算と汚染拡散計算の二つにわかれる。従来、これらの計算は、潮汐、高潮計算以来、数値解法として伝統的に差分法 (FDM) が用いられてきたが、⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾ 複雑な形状をなす陸境界の近似、また精度に応じたメッシュ分割、プログラムの汎用化などの面で不便があった。これらの点を克服するため、最近、構造解析の分野で成功をおさめてきた有限要素法 (FEM) の潮汐流への適用例や、⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾ 拡散計算への適用例⁽⁷⁾ があるが、とくに潮汐流においては、FDM に比べ、多くの演算時間を必要とすることが指摘され、⁽⁸⁾⁽⁹⁾ FEM をそのまま実際の海域、しかも瀬戸内海のような大きな海域へ適用することには困難があった。このため、潮流計算においては、演算時間におけるデメリット克服のために、いろいろな試みがなされてきている。⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾⁽¹²⁾⁽¹³⁾ また、拡散計算についても、従来の非定常計算法にかわり、定常計算法⁽¹⁴⁾ が採用されつつある。われわれは、これらの点に鑑み、精度と電子計算機の記憶容量、演算時間のバランスのとれた実用的な解法として、新たに変形ガラーキン法 (前進型)⁽¹⁵⁾ を用いた潮流計算法と、定常拡散計算法⁽¹⁶⁾ をとりいれた、FEM による水質汚濁シミュレーション・システムを開発した。⁽¹⁷⁾

最後に、このシステムにより、大阪湾、瀬戸内海のシミュレーションを行なったが、その結果、本論文で提案する FEM は、精度、演算時間を含めた、総合的なパフォーマンスの見地から、実用的な数値解法として有効と思われる。

2. システムの構成 (図1)

- ① 潮流計算部: Explicit (前進代入) 型計算法
- ② 定常拡散計算部: ユニット消去法
- ③ 強制条件: 任意の点において (水位のみ),
(流速のみ), (水位+流速) の3種類。(<150点)
- ④ 節点数 ≤ 2000, 要素数 ≤ 4000
- ⑤ 節点番号, 要素番号には欠番があってもよい。



3. 潮汐運動の解析

(1) 基礎式

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -g \cdot (h + \zeta) \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} - u \cdot \frac{\partial U}{\partial x} - v \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + f \cdot V - r^2 \cdot u \cdot \sqrt{u^2 + v^2} + A \cdot \nabla^2 U \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -g \cdot (h + \zeta) \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} - u \cdot \frac{\partial V}{\partial x} - v \cdot \frac{\partial V}{\partial y} - f \cdot U - r^2 \cdot v \cdot \sqrt{u^2 + v^2} + A \cdot \nabla^2 V \quad (2)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \quad (3)$$

ただし、 U : x 方向の線流量 $= u \cdot (h + \zeta)$ (m/sec) A : 水平方向の渦動粘性係数 (m^2/sec)

V : y 方向の線流量 $= v \cdot (h + \zeta)$ (m/sec) u, v : x, y 方向の平均流速 (m/sec), ζ : 水位 (m),

t : 時刻 (sec), h : 水深 (m), r^2 : 底面での摩擦係数 $= 0.0026$ (-), g : 重力加速度 $= 9.8$ (m/sec^2),

f : コリオリ係数 $= 2 \cdot \omega \cdot \sin \varphi$ ($1/sec$), ω : 7.292×10^{-5} (rad/sec), φ : 緯度 (度)

また、境界条件は、① $u = u_0$, $v = v_0$, $\zeta = \zeta_0$: 境界値固定 (時間変化)

② 陸または島で、 $u \cdot \ell_x + v \cdot \ell_y = 0$, ただし、 ℓ_x, ℓ_y : 外向き法線方向余弦の x, y 成分

(2) 有限要素法による定式化

いま、要素領域 V^e において、 $U = \sum_1^{ne} N_i(x, y) \cdot U_i(t)$, $V = \sum_1^{ne} N_i(x, y) \cdot V_i(t)$, $\zeta = \sum_1^{ne} N_i(x, y) \cdot \zeta_i(t)$ とおく。(ne : 要素あたりの節点数, $N_i(x, y)$: 形状関数, $U_i(t)$, $V_i(t)$, $\zeta_i(t)$: 節点値である。) 重み関数を N_i にとり、変形ガラーキン法¹⁴⁾により定式化し、Greenの定理から、境界条件を考慮すると、結局、 n 個の連立方程式がマトリクス形でつぎのように表わされる。(n : 総節点数, m : 総要素数)

$$[P] \cdot \{\dot{U}\} + [D] \cdot \{U\} + \{F\}_1 = 0 \quad (4), \quad [P] \cdot \{\dot{V}\} + [D] \cdot \{V\} + \{F\}_2 = 0 \quad (5)$$

$$[P] \cdot \{\dot{\zeta}\} + \{F\}_3 = 0 \quad (6)$$

ただし、

$$[P_{ij}] = \sum_1^m \left\{ \int_{V^e} N_i \cdot N_j \cdot dx \cdot dy \right\}, \quad [D_{ij}] = \sum_1^m \left\{ A \cdot \int_{V^e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx \cdot dy \right\},$$

$$\{F_i\}_N = - \sum_1^m \left\{ \int_{V^e} N_i \cdot Q_N \cdot dx \cdot dy \right\}, \quad (N = 1, 2, 3), \quad Q_1, Q_2 \text{ は、各々式(1), (2)の右辺第1項～第5項, } Q_3 \text{ は、式(3)の右辺全体である。}$$

(3) 誤差解析による定式化の検討¹⁴⁾

$$\text{式(4)～(6)は、一般に } P \cdot \dot{C} + D \cdot C + F = 0 \quad (7)$$

(P, D : 対称マトリクス, F : ベクトル) とおけるので、式(7)について考える。

① Implicit 法

(i) ガラーキン法

$$\text{式(7)を次式で表わす。} \quad P \cdot \dot{C} + D \cdot C = 0 \quad (8)$$

ここで、 D : 非対称マトリクスである。いま、タイム・スキームのパラメータ θ を考え、($0 \leq \theta \leq 1$)

$$\frac{C_i - C_{i-\Delta t}}{\Delta t} = \theta \cdot \dot{C}_i + (1-\theta) \cdot \dot{C}_{i-\Delta t} \quad (9)$$

とおくと式(8)より次式を得る。

$$\left(D \cdot \theta + \frac{P}{\Delta t} \right) \cdot C_i + \left\{ D \cdot (1-\theta) - \frac{P}{\Delta t} \right\} \cdot C_{i-\Delta t} = 0 \quad (10)$$

(ii) 変形ガラーキン法

これは、式(10)左辺のマトリクスを対称化するために、式(7)について考えたものである。よって式(9)より、

$$\left(D \cdot \theta + \frac{P}{\Delta t} \right) \cdot C_i + \left\{ D \cdot (1-\theta) - \frac{P}{\Delta t} \right\} \cdot C_{i-\Delta t} + F(C_i^*) \cdot \theta + F(C_{i-\Delta t}) \cdot (1-\theta) = 0 \quad (11)$$

が得られる。

② Explicit 法 (1 次要素の場合のみ) 式 (11) において、左辺第 1 項のマトリクスを集中化する。

③ 誤差解析の結果 (1 次元問題で 1 次要素の場合)

フーリエ級数法による誤差解析の結果を表 1 に示す。なお、潮汐の運動方程式では、拡散項は他に比べて非常に小さいため無視している。(解析法については文献 (14) を) 表 1 の数字が小さいほど、精度が良いことを、また、カッコ内の数字が、1 以下であると、数値的に安定であることを示している。これより Explicit 法が、数値的に安定な傾向を有していることがわかる。

表 1 誤差解析の結果

解法 θ	Implicit 法		Explicit 法
	ガラーキン法	変形ガラーキン法	
0	0.70(1.80)	0.70(1.80)	0.78(1.20)
1/2	0.45(1.00)	0.57(1.52)	0.77(1.01)
2/3	0.52(1.00)	0.63(1.50)	0.78(1.00)
1	0.62(1.00)	0.72(1.58)	0.95(1.05)

(4) 数値的計算例

① 計算条件 式 (12) ～ (14) の基礎式を、式 (15) なる境界条件のもとで (図 2) 考える。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -g \cdot h \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (12), \quad \frac{\partial V}{\partial t} = -g \cdot h \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (13), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \quad (14),$$

ただし、 $U = u \cdot h$
 $V = v \cdot h$ である。

- 境界条件 $x=0$ で; $u, \zeta = \sin t$
 $0 \leq x \leq \ell$ で, $u, \zeta = 0, t=0$, AC, BD で $v=0$ } (15)

ここで, $g=h=10$ とおくと, 解析解として,

$$u, \zeta = \sin(t - 0.1 \cdot x) \text{ を得る。}$$

- 連立方程式の解法: SOR 法

- データ $w = 12.5(\text{m})$, $\ell = 90(\text{m})$ とし,

$t = 7$ (秒) での結果を考える。

② 計算結果 ($\theta = 1/2$)

- (i) Implicit 法 (変形ガラーキン法; 式 (11) で $C_t^* = C_{t-\Delta t}$) の場合;
安定な解を得るのに非常に小さいタイム・ステップ ($\Delta t = 0.05$) が要求される。これは誤差解析の結果からも推定できる。

($\Delta t = 0.1$ では発散)

- (ii) Explicit 法 (1 段; 式 (11) で, $C_t^* = C_{t-\Delta t}$) の場合;

図 3, 4 に示す。これより位相のずれが大きいくと, Δt の選択に困難があることがわかる。($\Delta t = 0.28 \sim 0.4375$)

- (iii) Explicit 法 (2 段; まず(ii)により C_t を求め, これを改めて, C_t^* として, 再度式 (11) を解く) の場合;

図 5 に示す。(ii) に比べ位相のずれはやや小さくなっている。

また, Δt の選択基準は “発散しない限り最大のもの” とすれば良さそうである。($\Delta t = 0.5, 0.7; 0.875$ では発散)

以上の結果, 以下のシミュレーションでは Explicit 法 (2 段) を用いた。(なお, u と ζ の値はほとんど一致している。)

(6) 計算の手順

- ① 式(4)より U_t を求める。 ② 式(5)より V_t を求める。
- ③ 陸境界の処理 ④ 式 (14) より ζ_t を求める。 ① からくり返す。

4. 汚染拡散現象の解析⁽¹⁰⁾

(1) 基礎式 定常拡散方程式

$$\begin{aligned} \bar{U} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} + \bar{V} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (K_x + K_{x_0}) \cdot \bar{H} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (K_y + K_{y_0}) \cdot \bar{H} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} \right\} + \bar{H} \cdot Q \text{ を考える。} \end{aligned}$$

ただし,

C : 濃度 (ppm), $\bar{U}, \bar{V}$: 流れ一周期間の U, V 平均値 (m^2/sec)

$\bar{H}$: 流れ一周期間の ($h + \zeta$) の平均値 (m), K_x, K_y : x, y 方向の従来の渦動拡散係数 (m^2/sec),

K_{x_0}, K_{y_0} : x, y 方向の流速による拡散係数 (m^2/sec) である。

ここで,

$$K_{x_0} = \alpha \cdot \Delta L_x \cdot \sqrt{\frac{1}{M} \cdot \sum_1^M (u - \bar{u})^2}, \quad K_{y_0} = \alpha \cdot \Delta L_y \cdot \sqrt{\frac{1}{M} \cdot \sum_1^M (v - \bar{v})^2},$$

α : 拡散係数の代表長さ係数 (-), $\Delta L_x, \Delta L_y$: 要素の代表長さ (m), M : 流れ場の個数

- 境界条件 $C = C_0$ (境界値固定) または, $\partial C / \partial n = 0$ (n : 外向き法線の方向余弦) とする。

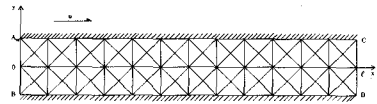


図 2 数値計算例 (63 節点 96 要素)

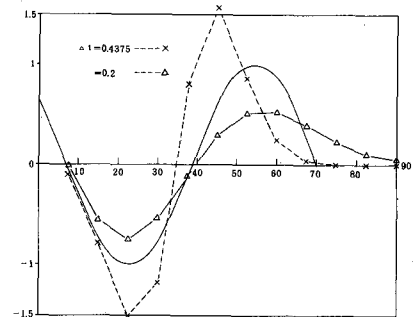


図 3 Explicit 法 (1 段) の場合 (1)

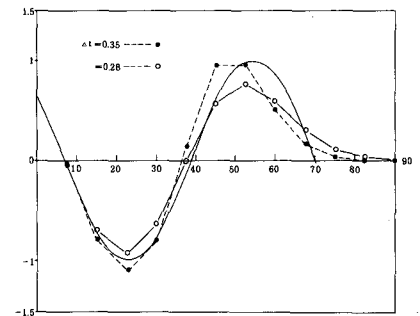


図 4 Explicit 法 (1 段) の場合 (2)

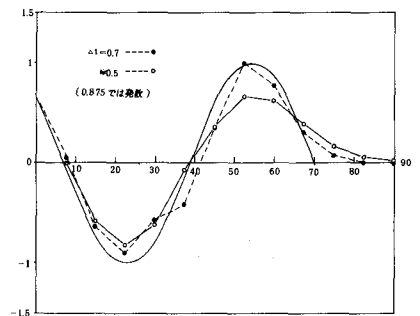


図 5 Explicit 法 (2 段) の場合

(2) 定式化 (ここでは省略)

最終的に n (総節点数) 個の連立方程式を 1 回解けばよい。このときユニット消去法を用いた。

5. 大阪湾の水質汚濁シミュレーション (50km×50km)

(1) 計算条件

明石海峡 (図 6, A 部) と友ヶ島水道 (図 6, B 部)

で, 流速および水位の M 2 分潮実測値と, 濃度ゼロを与

えた。また, $\Delta t = 60$ (秒), $K_x = K_y = 10^5$ (cm/sec),

COD 負荷量は, 計 462.3 トン/日とした。(水深: 7~94m)

(2) 計算結果

3 潮汐分 (36 時間) の計算で, ほぼ完全に収束した。

図 7 に流況の一例を, 図 8 に 3 点 (図 6) での潮流楕円

を示したが, 実測値との適合度は良好と思われる。

濃度分布の結果を図 9 に示す。実測値との比較より,

$\alpha = 20$ 程度が妥当であろうと思われる。

(183 節点, 306 要素; IBM S/370-M168)
流況: 222 K バイト, 14.1 分
拡散: 276 K バイト, 0.7 分 (5 ケース分)

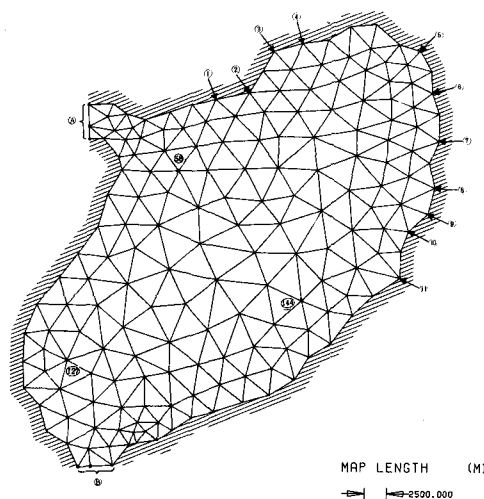


図 6 大阪湾の要素分割図

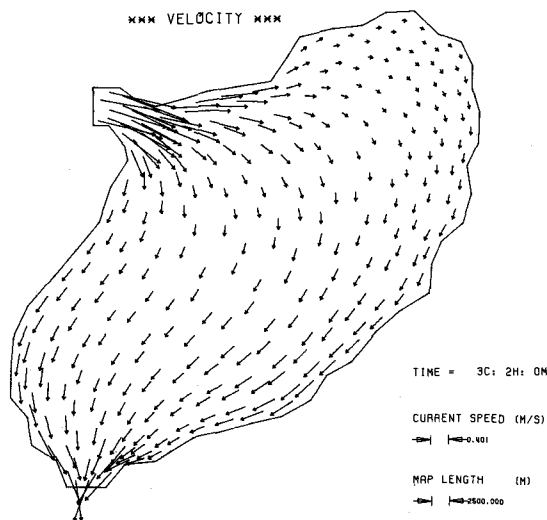


図 7 流況 (3 潮汐目 2 時)

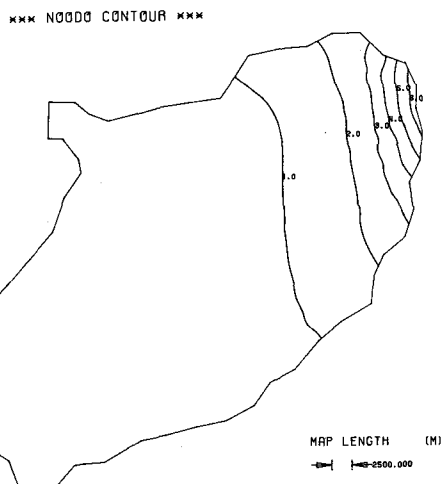
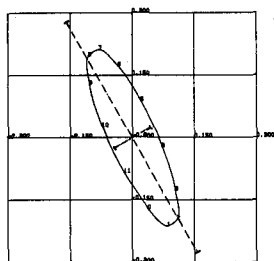
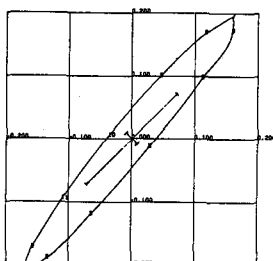


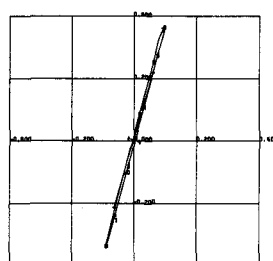
図 9 濃度分布 ($\alpha = 20$)



(a) 節点 58



(b) 節点 144



(c) 節点 127

図 8 潮流楕円

6. 瀬戸内海東部の流況シミュレーション (130km×300km)

(1) 計算条件

瀬戸内海の西部 (図10, A-B-C) と紀伊水道 (図10, D-E) で, 流速および水位のM 2 分潮実測値と濃度ゼロを, 内点の 17 点で流速の実測値を与えた。また, $\Delta t=150$ (秒) とした。(水深: 4~104 m)

(2) 計算結果

3 潮汐分 (36 時間) の計算結果を図12, 13 に示す。流速は実測値の $\frac{1}{2} \sim \frac{1}{3}$ となっているが流向はほぼ再現されている。潮境が, 備後灘と備讃瀬戸の間から備讃瀬戸の中央にかけて存在している。

(596 節点, 906 要素; IBM S/370-M168 ; 360 Kバイト, 18.5 分)

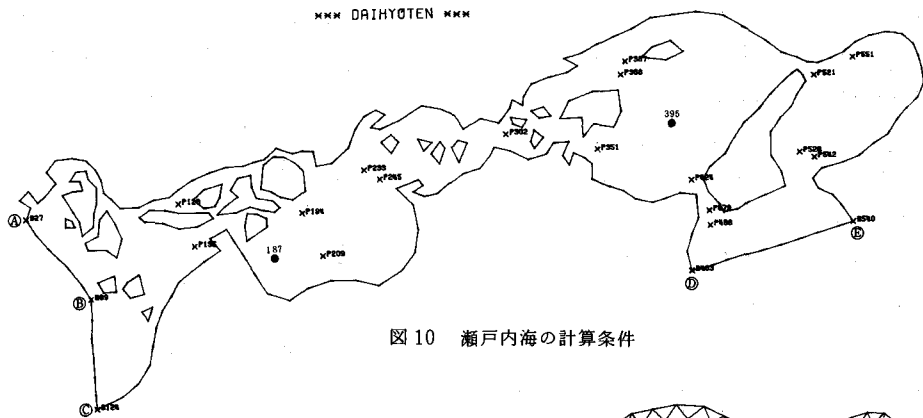


図 10 瀬戸内海の計算条件

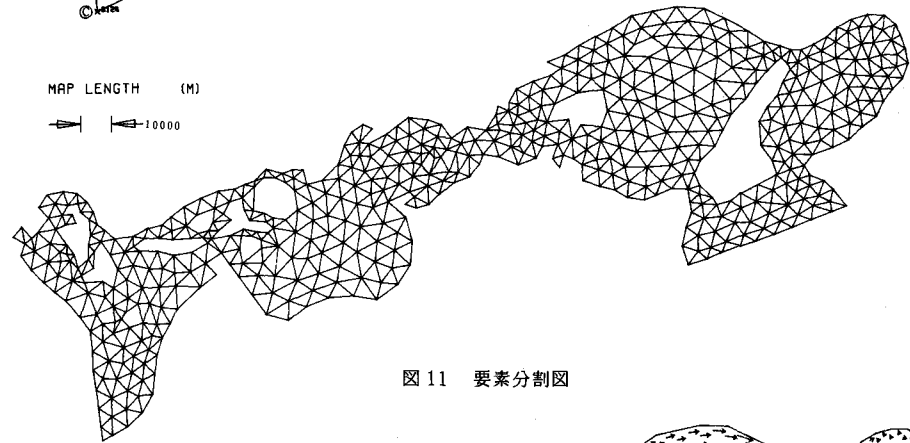


図 11 要素分割図

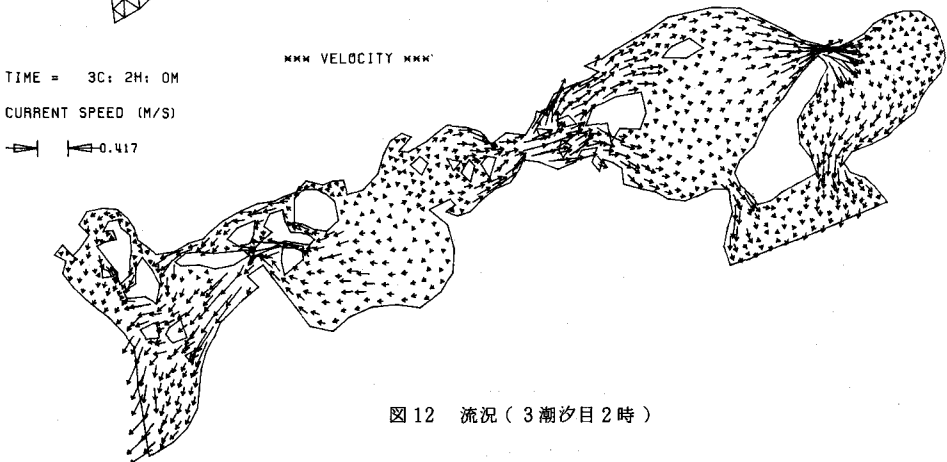


図 12 流況 (3 潮汐目 2 時)

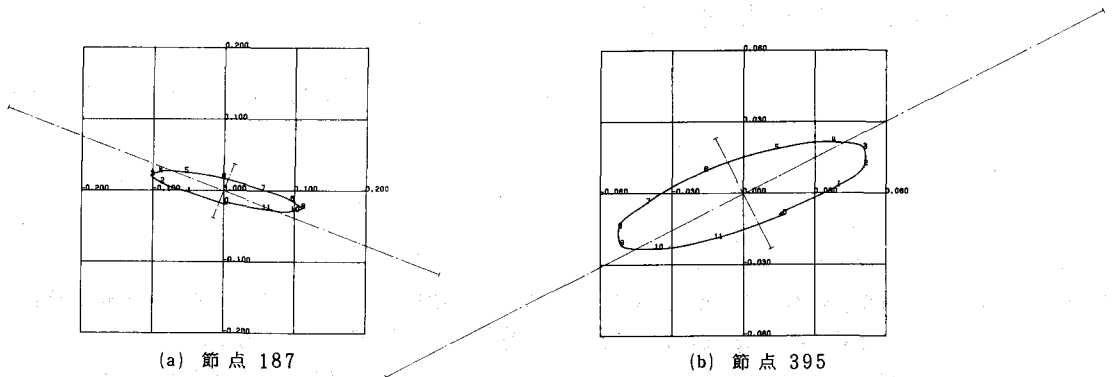


図13 潮流楕円

7. まとめと今後の課題

(1) まとめ 有限要素法によるシステムを開発した結果、従来の差分法によるシステムとの比較において下記の点が明らかとなった。

- ① 複雑な境界が扱える。 ② 必要とする精度を考慮した要素分割により、経済的なシミュレーションが可能。
 - ③ 非定常である流況の収束が早い。これは陸境界での流向に無理が無いためと思われる。
 - ④ 強制条件としては、境界、または任意の点において、差分法の場合の（水位のみ）または、（流速のみ）に加え、（水位と流速）を同時に与えることができるため、流況の再現がしやすい。
 - ⑤ 演算時間については、前進型計算であるため、従来の差分法と比べても本質的な差は出てこない。
- よって、有限要素法は、水質汚濁シミュレーション・システムの実用的な解法として有効であろうと思われる。

(2) 今後の課題 今後の課題としては、より高精度の計算方式の検討と同時に、自浄項などの物理的考察に基づいた関係式を本システムに導入すること、また、定常拡散計算方式における定数 α の検討が考えられよう。

（なお、誤差解析を利用して、逆に最適の前進計算方式を決めることができるが、詳細については文献⁽¹⁷⁾を参照されたい。

（参考文献）

- (1) Dronker, J.J., Proc. ASCE, Hy 6, Vol. 81, June, 1955.
- (2) Miyasaki, M., T. Ueno and S. Unoki, Oceanogr. Mag., 13(1), Oceanogr. May, 13(2), 1961~62.
- (3) 宇野木, 磯崎, 第9回海岸工学講演会, 1962.
- (4) G. Grotkop, Computer Meth. Appl. Mech. & Engng., 2 (1973), 147.
- (5) C. Taylor & J.M. Davis, Finite Elements in Fluids-Vol. 1, (1975), 95, John Wiley & Sons.
- (6) Connor, J.J. and Brebbia, C.A., Finite Element Techniques for Fluid Flow (1976), 233, Newnes-Butterworths.
- (7) 運輸省第四港湾建設局, 周防灘および周辺海域汚染計算報告書, (1974-3).
- (8) T.J. Weare, Computer Meth. Appl. Mech. & Engng, 7 (1976), 351.
- (9) 樫木ほか2名, 第23回海岸工学講演会, (1976), 488.
- (10) 日本アイ・ビー・エム, WPS-FEM有限要素法による水質汚濁解析シミュレータ, N:GE18-5062-1, (1976).
- (11) 川原ほか2名, 第23回海岸工学講演会, (1976), 498.
- (12) 川原ほか3名, 第23回海岸工学講演会, (1976), 524.
- (13) 田中ほか2名, 日本鋼構造協会第11回大会, (1977), 419.
- (14) 松田, 堀川, 日本機械学会講演論文集, No 774-10 (昭52-6), 87.
- (15) 運輸省第三港湾建設局, 瀬戸内海海水汚染対策調査, (1977-3).
- (16) 松田, 堀川, 日本機械学会講演論文集, No 777-1 (昭52-8).
- (17) 松田, 堀川, 日本機械学会講演論文集 (山梨) (昭52-11).