

拡散水理模型実験におけるひずみ模型効果

カリフォルニア大学バークレー 正員○花 村 哲 也

カリフォルニア大学バークレー Hugo. B. Fischer

1. まえがき

環境水理の問題に対し、模型実験は解明に有力な手掛りを与えてくれる。海岸や河口部の廃水拡散や温排水拡散などの模型実験の場合、広大な面積を模型化しかつ乱流構造を保つために水平縮尺と鉛直縮尺を違えた歪模型とする場合が多い。例えば、水平を1/1000、鉛直を1/100の縮尺にするなど、一般に水平と鉛直の縮尺比は1/5~1/20である。最近、拡散問題に対しては潮流や塩水楔の場合と違って歪模型では相似再現性が成り立たないことが指摘されている。〔Harleman (1965), Fischer and Holley (1971)〕

Crickmore (1972)は温排水拡散について模型実験と実物を比較し、水平流れ直角方向拡散（以下水平横拡散という）の割合が模型の場合実物の場合よりも大きいことを示した。従来、歪模型では重力と慣性力の相似性を保ち模型の流速分布や水位が等しくなるように別に粗度（例えば鉄片など）が付加される。歪模型における乱流拡散係数は、歪模型による速度分布の変化、付加粗度による速度分布や乱流構造の変化に、影響される。

一般に、付加粗度のない場合、乱流拡散係数は次式により表わされる。

$$\epsilon = k d U_* \quad (1)$$

ここに、 ϵ ：乱流拡散係数、 d ：水深、 U_* ：まさつ速度、 k ：無次元定数

k は、長方形直水路で鉛直方向0.07、水平横方向で0.15、実際の河川では水平横方向で0.6程度である。

(1)式は、従来からの多くの実験から求められたものでFischer (1972)によりまとめられている。しかし、歪模型の場合、付加粗度の存在により、もはや(1)式は適用できない。

本論文では、歪模型の場合の乱流拡散の相似特性を検討するとともに、鉄片粗度を付加した場合の乱流拡散特性を検討した。また、長方形水路で鉄片粗度を付加した場合の拡散実験を行い水平横方向拡散係数を測定し、鉄片粗度による水平横方向拡散係数の算定式を提案した。鉄片粗度による歪模型の拡散再現性を論じた。

2. 付加粗度のない場合の歪模型相似特性

海岸や河口部の模型ではフルード則が基本となる。今、水平方向、鉛直方向の模型縮尺を L_r, Y_r と定義すると、フルード則は $Fr=1$ が要求される。添字 r は模型と実物の量の比を示す。 $Fr=1$ は、

$$\frac{U_m}{\sqrt{g_m d_m}} = \frac{U_p}{\sqrt{g_p d_p}} \quad (2)$$

ここに、添字 m, p はそれぞれ模型(model)、実物(prototype)を示す。 U ：平均流速
 $g_m = g_p$ であるから、(2)式より

$$U_r = Y_r^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

乱流拡散係数の正しい縮尺表示は、次式により求まる。

$$\epsilon = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sigma^2 \quad (4)$$

ここに、 σ ：拡散濃度分布の標準偏差

x, y, z を、それぞれ、流れ方向、鉛直深さ方向、水平横方向座標軸とすると、分散の縮尺は $(\sigma_y^2)_r = Y_r^2$ 、 $(\sigma_z^2)_r = L_r^2$ となる。 $Tr = (x/U)_r = L_r/U_r = L_r Y_r^{-\frac{1}{2}}$ の関係より

$$(\epsilon_y)_r = Y_r^2 / Tr = L_r^{-1} Y_r^{5/2} \quad (5)$$

$$(\epsilon_z)_r = L_r^2 / Tr = L_r Y_r^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

一方、実際の場合、十分に混合した河口部では拡散係数は(1)式で表わされるから、

$$\epsilon_r = d_r \cdot (U_*)_r \quad (7)$$

ここに、 $U_* = \sqrt{g R I}$ 、 $R \approx d$ であるから、 $(U_*)_r = Y_r L_r^{-\frac{1}{2}}$ を用いると

$$\epsilon_r = Y_r^2 L_r^{-\frac{1}{2}} \quad (8)$$

本来なら、相似再現性からは(5)、(6)式が要求されるのであるが、実際は(8)式の形の拡散係数縮尺となる。比較すると

$$\frac{\epsilon_y}{(\epsilon_y)_{req}} = \left(\frac{L_r}{Y_r} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

$$\frac{\epsilon_z}{(\epsilon_z)_{req}} = \left(\frac{Y_r}{L_r} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (10)$$

ここに、添字 req は、本来要求される拡散係数縮尺を示す。

例えば、 $Y_r/L_r = 10/1$ の歪模型では、 $\epsilon_y/(\epsilon_y)_{req} = 1/32$ 、 $\epsilon_z/(\epsilon_z)_{req} = 32$ となり、鉛直方向拡散係数は $1/32$ に縮められ、水平横方向拡散係数は 32 倍も誇大な値となる。したがって、 $L_r = Y_r$ の場合のみに拡散相似率が満足され、歪模型では相似率が満足されず、拡散問題には適用できないことがわかる。

3. 付加粗度による歪模型効果

以下に示す近似解析により付加粗度による歪模型効果を考察する。幅の広い水路における等流状態を考えると、実物のせん断応力は次式により示される。

$$\tau_p = \gamma \cdot d_p \cdot I_p \quad (11)$$

ここに、 τ ：せん断応力、 γ ：単位重量、 I ：エネルギー勾配

歪模型では、全せん断力は、底面のせん断力と付加粗度によるせん断力との合計である。すなわち、

$$\tau_m = \tau_{Bm} + \tau_{sm} = \gamma \cdot d_m \cdot I_m \quad (12)$$

ここに、 τ_m ：全せん断力、 τ_{Bm} ：底面せん断力、 τ_{sm} ：付加粗度 (strip 粗度が一般的) によるせん断力。模型、実物ともに、底面せん断力は Darcy-Weisbach のまさつ係数を使って表わせるとする。

$$\tau_B = \frac{\rho}{8} f U^2 \quad (13)$$

ここに、 ρ ：密度、 f ：まさつ係数、 U ：平均流速

今、模型の場合も実物の場合もまさつ係数が近似的に等しいと仮定すると、(13) 式より

$$\frac{\tau_{Bm}}{\tau_{Bp}} = \left(\frac{U_m}{U_p} \right)^2 = U_r^2 \quad (14)$$

τ_{Bp} は (11) 式の τ_p と等しく、 $\tau_m = \gamma_m \cdot d_m \cdot I_m$ であるから、(11)、(12)、(14) より、

$$\tau_{sm} = \tau_m \left(1 - \frac{d_p I_p}{d_m I_m} U_r^2 \right) \quad (15)$$

一方、 $d_m/d_p = Y_r$ 、 $I_m/I_p = I_r = Y_r/L_r$ 、 $U_r = Y_r^{\frac{1}{2}}$ より

$$\tau_{sm} = \tau_m (1 - L_r/Y_r) \quad (16)$$

したがって、 $Y_r/L_r = 5 \sim 20$ の歪模型では、付加粗度によるせん断力は、全せん断力の 80% ~ 95% にもなる。すなわち、歪模型では付加粗度による効果が大きく、もはや、 $\epsilon = k \cdot d \cdot U_*$ の関係が成立せず、付加粗度による乱流拡散係数式を求めねばならない。

4. 鉛直鉄片粗度による乱流拡散解析

鉛直鉄片が図・1のように規則正しく配置されている場合、鉄片粗度が水平横方向拡散係数に与える効果

を考察する。

今、底面によるまさつ抵抗を無視して、鉄片粗度によるせん断力のみにより拡散が生ずると仮定する。1本の鉄片に対して、速度分布変化により生ずるせん断応力は、

$$\tau = \gamma \left(\frac{b}{2} - z' \right) I = \rho \cdot \epsilon_z \cdot \frac{dU}{dz'} \quad (17)$$

ここに、 ϵ_z ：水平横方向運動量拡散係数

運動量拡散係数は質量拡散係数に等しいと仮定し、流速は鉛直方向に変化しないと仮定する。(17)式を積分すると、

$$U = \left(\frac{gI}{2\epsilon_z} \right) \cdot (b - z') \cdot z' + U_c \quad (18)$$

ここに、 U_c ：鉄片を通る対称軸に沿う一定流速

平均流速は

$$U = \frac{gIb^2}{12\epsilon_z} + U_c \quad (19)$$

1本の鉄片に作用する抗力は

$$F = \frac{1}{2} \rho \cdot CD \cdot U^2 \cdot a \cdot d \quad (20)$$

ここに、 CD ：抗力係数、 a ：鉄片の幅。一方、当初の仮定により

$$F = \gamma d I \cdot b \ell \quad (21)$$

ℓ ：鉄片の流れ方向間隔距離

(20)、(21)式から、勾配 I を求め(19)式に代入すると

$$\epsilon_z = \frac{CD \cdot b \cdot a \cdot U}{24\ell} \cdot \frac{U}{U - U_c} \quad (22)$$

$U_c = 0$ を仮定すると、

$$\epsilon_z = \frac{CD \cdot b \cdot a \cdot U}{24\ell} \quad (23)$$

鉄片粗度によるまさつ速度は $U_* = \sqrt{gdI}$ であるから、(20)、(21)式に代入すると

$$\frac{U}{U_*} = \sqrt{\frac{2b\ell}{CD \cdot a \cdot d}} \quad (24)$$

したがって、(23)式は

$$\frac{\epsilon_z}{dU_*} = \frac{\sqrt{2CD}}{24} \sqrt{\frac{ab^3}{\ell d^3}} \quad (25)$$

規則正しい鉄片配置、 $b = \ell$ の場合、 $CD = 1.8$ とすると

$$\epsilon_z = 0.08 a U \quad (26)$$

$$\frac{\epsilon_z}{dU_*} = 0.08 \sqrt{\frac{ab^3}{d^3}} \quad (27)$$

実際には、 U_c はある値をもつであろうし、 x 方向にも変化することから、上の値よりも、幾分大きい係数を取ると考えられる。

5. 鉄片粗度による乱流拡散係数の歪模型効果

今、一般化して、水平横方向乱流拡散係数は、次のように表わされるものとする。

$$(\epsilon_z)_p = k \cdot d_p \cdot U_{*p} \quad (28)$$

$$(\epsilon_z)_m = k_m \cdot a \cdot U_m \quad (29)$$

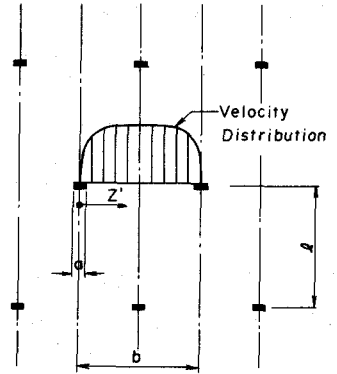


図1 鉛直鉄片の平面配置

実物においては、平均流速はChézy 公式が適用できると仮定する。

$$U_p = C_z \sqrt{d_p I_p} = \frac{C_z}{\sqrt{g}} U_{*p} \quad (30)$$

ここに、 C_z : Chézy の係数。(28)式に代入し、拡散係数の縮尺を求めると、

$$(\epsilon_z)_r = \frac{(\epsilon_z)_m}{(\epsilon_z)_p} = \frac{k_m a U_m}{k \sqrt{\frac{g}{C_z}} d_p U_p} = \frac{k_m a C_z}{k \sqrt{g} d_p} \cdot U_r \quad (31)$$

付加粗度のついた歪模型についても、正しい拡散係数縮尺を満足するためには、 $(\epsilon_z)_r = L_r Y_r^{\frac{1}{2}}$ が要求される。(31)式と比較すると、 $U_r = Y_r^{\frac{1}{2}}$ より、次式が満足されねばならない。

$$L_r = \frac{k_m \cdot C_z}{k \sqrt{g}} \left(\frac{a}{d_p} \right) \quad (32)$$

k , k_m , C_z は実験値や実物観測値から推定される。 k , k_m , C_z が解れば、水平縮尺に応じて鉄片幅 a を水深 d_p の関係から選べば、正しく相似性を合わせることができる。

6. 鉄片粗度による拡散実験

実験は、カルフォルニア大学バークレー水理研究所にある長さ 18.3 m の傾斜、循環長方形水路でなされた。(図2) 水路幅は 61 cm で勾配は自由に調節できる。水路底に亜鉛鉄板を敷きその上に幅 1.9 cm の鉄片を鉛直に取り付けた。鉄片は千鳥配置とし、鉄片横間隔 2.04 cm、鉄片列縦間隔 2.04 cm とした。

(図3) 染料の投入は、水路中央の半水深の高さに細管によりなされた。染料はローダミンを使用した。サンプリングは、投入口より下流 1.2 m および 1.8 m の 2 断面でなされ、半水深の高さで横断方向に 12 点 2 インチ間隔でなされた。染料濃度はフルオロメーターにより測定した。横断方向濃度分布より分散を計算し、次式により乱流拡散係数を求めた。

$$\epsilon = \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot \frac{U}{L} \quad (33)$$

ここに、 σ^2 : 分散、 L : 染料投入口より測定断面までの距離

図4は、 $\epsilon_z \sim a U$ の関係について実験値を落したものである。

結果は

$$\epsilon_z = 0.105 a U \quad (34)$$

(26) 式が $U_c = 0$ とした場合の下限值と考えられることから、上式は妥当な近似式と言える。

図5は $\epsilon_z / d U_* \sim \sqrt{\frac{a b^2}{d^3}}$ の関係で、(27) 式の妥当性を証明している。得られた結果は、

$$\frac{\epsilon_z}{d U_*} = 0.10 \sqrt{\frac{a b^2}{d^3}} \quad (35)$$

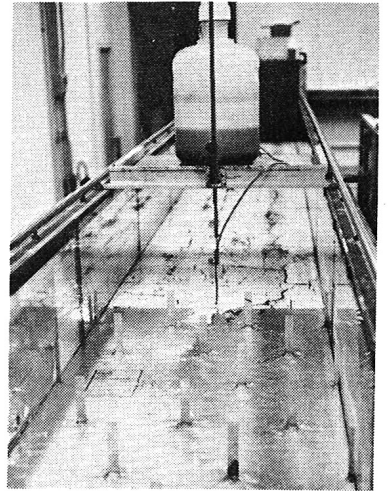


図3・鉛直鉄片粗度

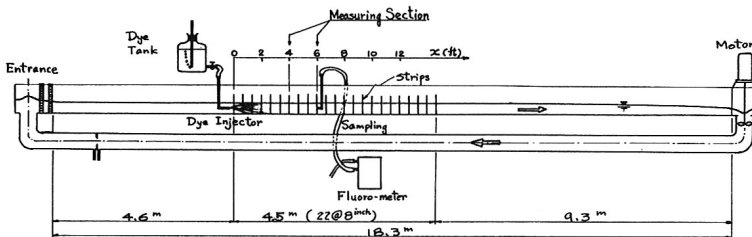


図2・実験水路概要図

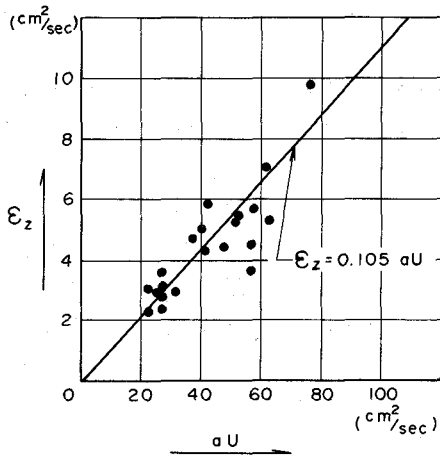


図4. ϵ_z と aU の関係

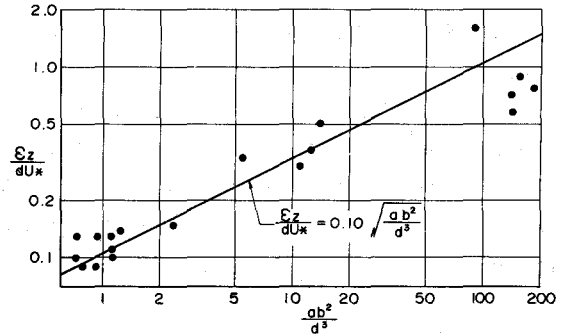


図5. ϵ_z / dU_* と $\sqrt{\frac{ab^2}{d^3}}$ の関係

7. 実物観測データとの比較に関する考察

以上の結果を、実物観測データと歪模型実験のデータのある例について考察する。図6は、米国カリフォルニア州サンフランシスコ湾の拡散について、実物実測と模型実験の結果を比較したものである。実物実測はカリフォルニア州水資源局が行ったもので、模型実験は、米国陸軍工兵隊がサセリートにある模型で行ったものである。(Nelson and Lierseith (1972)) 模型縮尺は、水平 $L_r=1/1000$ 、鉛直 $Y_r=1/100$ で、付加粗度として幅 1.9 cm の鉛直銅片を用いた。

実物と模型の唯一の大きい差異は、実物では染料は1時間程の投入であるが、模型では連続的である。

Ward と Fischer (1971) は、実物の結果を解析し、水平横方向拡散係数 $0.25 \sim 0.4\text{ m}^2/\text{sec}$ を得た。図6の濃度分布は5回目の潮タサイクルの時の値である。模型の結果が、良く実物結果と合っていることがわかる。

模型実験の平均流速は、実際の潮汐による平均流速が 0.45 m/sec であるから、実験では $U_r=Y_r^{1/2}$ より $U_m=0.045\text{ m/sec}$ である。

実験から得た鉄片粗度による式 (34) から拡散係数を求めると $\epsilon_{zm}=0.9 \times 10^{-4}\text{ m}^2/\text{sec}$ が得られる。正しい ϵ_z の模型縮尺は $\epsilon_r=L_r Y_r^{1/2}$ であるから、実物の場合に直すと、 $\epsilon_{zp}=0.9\text{ m}^2/\text{sec}$ となる。

これは実測データ $0.25 \sim 0.4\text{ m}^2/\text{sec}$ の約3倍の値であり、拡散の広がり距離では約1.7倍である。しかし、図6では、模型実験の方が、上式の前測値よりもよく合っている。しかし、前測値はオーダーとしては妥当なものである。

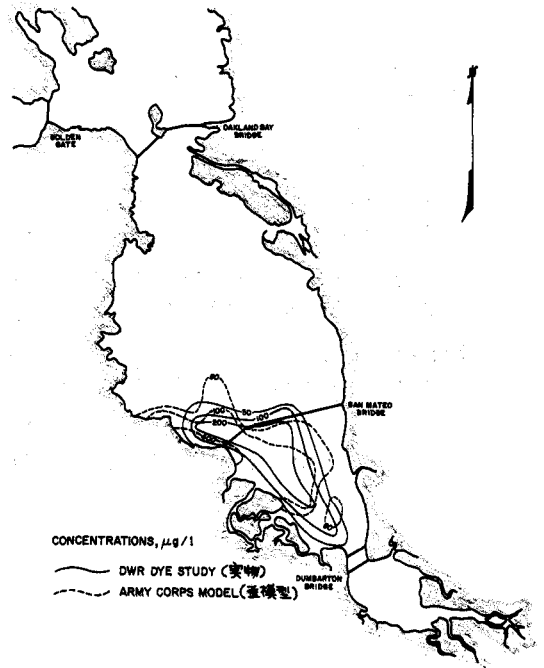


図6 サンフランシスコ湾における染料拡散の模型と実物の場合の比較 (Nelson et al, 1972)

$\varepsilon_z = k_m \cdot a \cdot U_m$ なる予測式と、実際の模型実験の場合との実物への一致度合の差異は、今回の鉄片粗度実験が少ないことと、図6のような模型と実物の比較例が少いことによるものと考えられ、今後、さらに多くのデータを集めて検討することが必要である。

今、かりに、 $\varepsilon_z = 0.11 a U$ が鉄片粗度のある場合の拡散係数を正しく表わしているものとするとき、 a と d の関係を検討する。米国陸軍工兵隊の実験結果を(32)式に代入してみる。ただし、つぎのような数値を採用する。

$$Lr = 1/1000, \quad a = 1.9 \text{ cm}, \quad \text{平均水深 } d_p = 3.1 \text{ m}, \quad Cz = 1.20$$

(32)式より、 $k = 26$ となる。すなわち、実物では $\varepsilon_z = 26 d U_*$ で表わされることになる。この値は、実測河川での値 0.6 よりも 45 倍も大きい。潮汐の影響で k が大きくなることは予想されるが、このように大きい値になるかはわからない。今後、河口部の拡散の実物データを比較して、(32)式の妥当性について検討せねばならない。

8. まとめ

歪模型では、一般に付加粗度を設ける。付加粗度によるせん断力は歪模型の場合、非常に大きく、 $5 \sim 20$ の歪模型で $80 \sim 90\%$ にもなる。鉄片粗度による速度分布の変化を考慮すると、規則正しい配置の鉄片の場合、水平方向拡散係数は $\varepsilon_z = k_m a U$ で表わされ、実験的にも確かめられた。 $k_m = 0.11$ 程度と考えられる。 $\varepsilon_z / d U$ が $\sqrt{\frac{a b^2}{d^3}}$ に比例することも確認された。河口部の k 、まさつ係数 Cz 、それに k_m がわかれば、鉄片の幅 a と水深 d は $\frac{a}{d} = Lr \cdot k \sqrt{g} / (k_m \cdot Cz)$ になるようにすれば、歪模型の場合も相似再現性が成立することが提案された。これらの結果は、今後、さらに、実験室で、野外で多くの拡散性質のデータを取り検討を加える必要がある。

参考文献

- Fischer, H.B. and E.R. Holley, "Analysis of the Use of Distorted Hydraulic Models for Dispersion Studies", Water Resources Research, vol. 7, No. 1, Feb., 1971
- Fischer, H.B., "Longitudinal Dispersion and Turbulent Mixing in Open-channel Flow", Annual Review of Fluid Mech., vol. 5, 1973
- Harleman, D.R.F., "The Significance of Longitudinal Dispersion in the Analysis of Pollution in Estuaries", Proc. Second Internatl. Water Pollution Res. Conf., Tokyo, Pergamon Press, New York, 1965
- Ward, P.R.B. and H.B. Fischer, Water Resources Research, vol. 7, 1971