

パイプインパイプの軸圧縮座屈に対する コアの力学的役割

MECHANICAL ROLE OF INNER CORE MATERIALS FOR AXIALLY COMPRESSED BUCKLING OF PIPE-IN-PIPE SYSTEMS

佐藤太裕¹・嶋崎賢太²
Motohiro SATO, Kenta SHIMAZAKI

¹正会員 博(工) 北海道大学大学院助教 工学研究院北方圏環境政策工学部門
(〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

²正会員 修(工) 国土交通省港湾局計画課
(〒100-8918 東京都千代田区霞が関2-1-3)

Pipe-in-pipe systems have significant potential for application in offshore oil and gas production systems because of their property that combines thermal insulation performance with structural strength and self weight in an integrated way. Such cross-sections comprise inner and outer thin walled pipes with the annulus between them fully filled by a selectable filler material to impart an appropriate combination of properties. For structural designs of offshore pipelines, axially compressed forces are one of dominant external loads as well as bending and hydrostatic pressure. Thus, the evaluation of the buckling resistance under axial compression is of great importance. Especially in pipe-in-pipe systems, inner core materials play an important mechanical role when subjected to external loads.

This paper presents the theoretical investigation on the mechanical role of inner core materials for axially compressed elastic buckling of pipe-in-pipe systems. An excellent performance of buckling resistance for flexible pipe-in-pipes with granular core materials, developed by the authors, is also introduced here.

Key Words : Pipe-in-pipe system, elastic buckling, axial compression, core material

1. はじめに

海洋でのエネルギー輸送を目的としたパイプラインは、特に大水深域において極めて大きな静水圧作用に対する耐崩壊性、石油やガスといった高温流動体に対する耐熱性や、水中で浮力と自重のバランスによる構造安定性といった性能が、非常に高い次元で要求される構造物である^{1),2)}。

上述の海洋パイプラインにおける要求性能を満足する技術として、著者らは「パイプインパイプ構造」を提案している。パイプインパイプ構造とは、内側と外側の鋼製の薄いパイプの間に比較的厚いコアを挟むことにより、合成断面として崩壊強度の増加、中間のコアによる断熱効果を期待するものである。著者らはこれまでに、パイプインパイプの静水圧および曲げ作用に対するコアの力学的役割について解析的に検討する³⁾⁶⁾とともに、コア材として砂などの粒状体を用いることで曲げ靱性を高めた新しいフレキシブルパイプインパイプに関する開発を行ってきた⁷⁾。本論文では静水圧、曲げとともに支配的な外力となる軸圧縮に対する座屈抵抗性について、弾性力学に基づく定式化から考察を行う。またコアの力学的役割について検討し、著者らが提案す

る粒状体をコア材とするフレキシブルパイプインパイプが従来型のセラミックなどを用いるものに対し、その利点を保持したまま性能を高めていることを理論的に実証する。

2. 研究概要

(1) 解析モデルとなるパイプインパイプについて

図-1 は本論文で検討対象とするパイプインパイプを示したものである。ここでは外管（管厚： t_1 ，半径： a_1 ，図-1(a)に対応），内管（管厚： t_2 ，半径： a_2 ，図-1(b)に対応）がそれぞれ軸圧縮荷重を受ける場合を考え、弾性座屈に関する定式化を行う。内、外管はその半径に比較して厚さが薄いことからともに薄肉円筒シェル（ヤング係数： E_p ，ポアソン比： ν_p ）として、それに対してコア材は比較的厚いことから3次元等方弾性連続体（ヤング係数： E_c ，ポアソン比： ν_c ）としてモデル化する。変位については軸（ z ）方向変位を u ，円周（ θ ）方向変位を v ，半径（ r ）方向変位を w と定義する。

(2) 定式化，力学モデルの概略

定式化はまず最初に、薄肉円筒シェルである内、

外管と弾性連続体コア材の相互作用を、両者の境界部での連続性を考慮することにより行う。この定式化により得られる座屈荷重は、セラミックなどの連続体をコア材とし、内外管と完全付着させ力学性能を発揮させる場合に対応する厳密解である。これに対して、著者らが提案する粒状体をコア材とするパイプインパイプは、コア材はパイプとの付着状態および連続体としての性質について、弾性連続体コア材とは大きく異なる力学的挙動を示す。つまり管半径方向に対してはその断面拘束効果を発揮するが、円周方向および軸方向に対して管を拘束せず、かつコア材としての曲げ剛性を有しない。このことが軸圧縮座屈に対する抵抗性とどのような関係があるか考察する。そのためにコア材のモデル化として、半径方向の弾性復元力のみを考慮した定式化を同時に行い、連続体コアの場合と弾性座屈挙動の比較を行った。

3. 定式化

(1) 内外管の支配方程式

以下では座屈荷重についての厳密な解析を行う。ここでは薄肉円筒シェル理論に基づく座屈時の以下の支配方程式を用いる。

$$\left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} + \frac{(1-\nu_p)(1+\lambda)}{2a_i^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta^2} \right] + \frac{1+\nu_p}{2a_i} \frac{\partial^2 v_i}{\partial \theta \partial z} + \frac{\nu_p}{a_i} \frac{\partial w_i}{\partial z} + \frac{f_z}{K_p t_i} = 0 \quad (1)$$

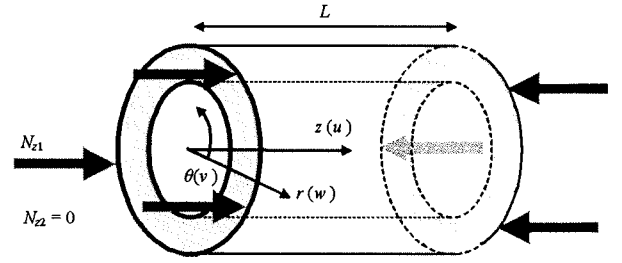
$$\left(\frac{1+\nu_p}{2a_i} + \frac{N_{zi}}{K_p t_i a_i} \right) \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta \partial z} + \left[\frac{1}{a_i^2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu_p}{2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial z^2} \right] + \left[\frac{1}{a_i^2} \frac{\partial w_i}{\partial \theta} - \lambda_i \frac{\partial^3 w_i}{\partial \theta \partial z^2} \right] + \frac{f_\theta}{K_p t_i} = 0 \quad (2)$$

$$\lambda_i a_i^2 \frac{\partial^4 w_i}{\partial z^4} + 2\lambda_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial \theta^2 \partial z^2} + \frac{\lambda_i}{a_i^2} \frac{\partial^4 w_i}{\partial \theta^4} + \frac{2\lambda_i}{a_i^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \theta^2} + \frac{N_{zi}}{K_p t_i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} + \frac{1+\lambda_i}{a_i^2} w_i + \frac{\nu_p}{a_i} \frac{\partial u_i}{\partial z} + \frac{1}{a_i^2} \frac{\partial v_i}{\partial \theta} - \frac{f_r}{K_p t_i} = 0 \quad (3)$$

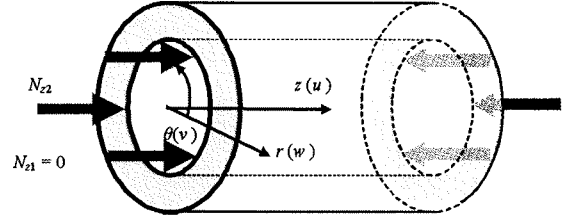
ここで、添え字 i は外側パイプが 1、内側パイプが 2 に対応する（これより支配方程式は計 6 本となる）。 N_{zi} は軸圧縮力であり、ここでは外管が圧縮される場合内管の軸圧縮力 $N_{z2} = 0$ 、内管が圧縮される場合外管の軸圧縮力 $N_{z1} = 0$ とする。また $\lambda_i = 1/12 \cdot (t_i/a_i)^2$ 、 $K_p = E_p / (1 - \nu_p^2)$ であり、 f_z 、 f_r 、 f_θ はそれぞれチューブが弾性体コアから受ける軸方向、半径方向、円周方向の反発力を表す。上の内外パイプに対する計 6 つの座屈時支配方程式を解くこととなる。

(2) 弾性連続体コアの定式化

式(1)~(3)中における弾性連続体コアの反発力は、3 次元弾性論に基づき導かれた以下の変位、応力式



(a) 外管が軸圧縮力を受ける場合



(b) 内管が軸圧縮力を受ける場合

図-1 解析モデル

(軸圧縮を受けるパイプインパイプ、外管厚： t_1 、外管半径： a_1 、内管厚： t_2 、内管半径： a_2)

により評価する⁸⁾。

$$2G \cdot u = -n \cos n z \sin m \theta \left\{ c_1 I_m(nr) + c_2 K_m(nr) + \frac{r}{a} [c_3 I_{m+1}(nr) + c_4 K_{m+1}(nr) + c_5 I_{m-1}(nr) + c_6 K_{m-1}(nr)] \right\} \quad (4)$$

$$2G \cdot v = -\sin n z \cos m \theta \left\{ \frac{m}{r} [c_1 I_m(nr) + c_2 K_m(nr)] + \frac{m+2\zeta}{a} [c_3 I_{m+1}(nr) + c_4 K_{m+1}(nr)] + \frac{m-2\zeta}{a} [c_5 I_{m-1}(nr) + c_6 K_{m-1}(nr)] \right\} \quad (5)$$

$$2G_c \cdot w = -\sin n z \sin m \theta \left\{ c_1 I'_m(nr) + c_2 K'_m(nr) + \frac{r}{a} [c_3 I'_{m+1}(nr) + c_4 K'_{m+1}(nr) + c_5 I'_{m-1}(nr) + c_6 K'_{m-1}(nr)] - \frac{3-4\nu_c}{a} [c_3 I_{m+1}(nr) + c_4 K_{m+1}(nr) + c_5 I_{m-1}(nr) + c_6 K_{m-1}(nr)] \right\} \quad (6)$$

$$\tau_{rz} = -n \cos n z \sin m \theta \left\{ c_1 I'_m(nr) + c_2 K'_m(nr) + \frac{r}{a} [c_3 I'_{m+1}(nr) + c_4 K'_{m+1}(nr) + c_5 I'_{m-1}(nr) + c_6 K'_{m-1}(nr)] - \frac{\zeta-1}{a} [c_3 I_{m+1}(nr) + c_4 K_{m+1}(nr) + c_5 I_{m-1}(nr) + c_6 K_{m-1}(nr)] \right\} \quad (7)$$

$$\tau_{r\theta} = -\sin n z \cos m \theta \left\{ \frac{m}{r} [c_1 I'_m(nr) + c_2 K'_m(nr)] + \frac{m+\zeta}{a} [c_3 I'_{m+1}(nr) + c_4 K'_{m+1}(nr)] + \frac{m-\zeta}{a} [c_5 I'_{m-1}(nr) + c_6 K'_{m-1}(nr)] \right\}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{m}{r^2} [c_1 I_m(nr) + c_2 K_m(nr)] \\ & -\frac{\xi(m+1)}{r \cdot a} [c_3 I_{m+1}(nr) + c_4 K_{m+1}(nr)] \\ & -\frac{\xi(m-1)}{r \cdot a} [c_5 I_{m-1}(nr) + c_6 K_{m-1}(nr)] \} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sin n z \sin m \theta & \left\{ c_1 \left[-\left(n^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) I_m(nr) + \frac{1}{r} I'_m(nr) \right] \right. \\ & + c_2 \left[-\left(n^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) K_m(nr) + \frac{1}{r} K'_m(nr) \right] \\ & + \frac{1+\xi}{a} [c_3 I'_{m+1}(nr) + c_4 K'_{m+1}(nr) + c_5 I'_{m-1}(nr) + c_6 K'_{m-1}(nr)] \\ & - \frac{n^2 r^2 + (m+1)^2 - (2-\xi)(m+1)}{r \cdot a} [c_3 I_{m+1}(nr) + c_4 K_{m+1}(nr)] \\ & \left. - \frac{n^2 r^2 + (m-1)^2 + (2-\xi)(m-1)}{r \cdot a} [c_5 I_{m-1}(nr) + c_6 K_{m-1}(nr)] \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $\xi = 2(1-\nu_c)$ 、 $G = E_c / 2(1+\nu_c)$ 、 $q = n\pi/L$ であり、 m は円周方向の座屈波数、 n はパイプ軸方向の座屈波数、 I_m 及び K_m は m 次の変形ベッセル関数であり、 $I'_m(qr)$ 、 $K'_m(qr)$ は r による微分を表す。また $c_1, \dots, c_6$ はパイプとコアの間の変位の連続条件により定められる未定係数である。これらよりパイプの単位変位に対して発生する応力から弾性体コアの剛性係数として求め、それらの重ね合わせによって全変位に対して発生するコアの応力、すなわち反発力を求める。例えば外管の軸方向変位 u_1 について考えてみる。内外管との境界面におけるコアの変位式を行列表記するとともに、外管の軸方向変位 u_1 にのみ単位の変位を与える場合、次式のように表される。

$$[X] \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 / \cos qz \sin m \theta \\ w_1 / \sin qz \sin m \theta \\ v_1 / \sin qz \cos m \theta \\ u_2 / \cos qz \sin m \theta \\ w_2 / \sin qz \sin m \theta \\ v_2 / \sin qz \cos m \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

これより 6 つの未定係数 $c_1, \dots, c_6$ が次式により求められる。

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{Bmatrix} = [X]^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

求めた未定係数を応力の式(7)~(9)に代入することで u_1 の単位変位によって生じる各種応力が得られ、それを剛性係数として以下のように用いる。

$$\begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ k_{31} \\ k_{41} \\ k_{51} \\ k_{61} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_{rz}(a_1) / \cos qz \sin m \theta \\ \sigma_r(a_1) / \sin qz \sin m \theta \\ \tau_{r\theta}(a_1) / \sin qz \cos m \theta \\ \tau_{rz}(a_2) / \cos qz \sin m \theta \\ \sigma_r(a_2) / \sin qz \sin m \theta \\ \tau_{r\theta}(a_2) / \sin qz \cos m \theta \end{Bmatrix} = [Y] \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{Bmatrix}_{u_1=1} \quad (12)$$

上述のように u_1 の単一変位に対してコアと内外管それぞれの境界面に生じる各種応力が得られ、同様の手順を全ての変位成分について行うことにより、計 36 個の剛性係数が求められる。そして、それらの剛性係数を用いて各応力成分を重ね合わせることで、チューブとの境界面での変位に対するコアの反発力を計算することができる。

$$\begin{Bmatrix} f_{z1} / \cos qz \sin m \theta \\ f_{r1} / \sin qz \sin m \theta \\ f_{\theta 1} / \sin qz \cos m \theta \\ f_{z2} / \cos qz \sin m \theta \\ f_{r2} / \sin qz \sin m \theta \\ f_{\theta 2} / \sin qz \cos m \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_{rz}(a_1) / \cos qz \sin m \theta \\ \sigma_r(a_1) / \sin qz \sin m \theta \\ \tau_{r\theta}(a_1) / \sin qz \cos m \theta \\ \tau_{rz}(a_2) / \cos qz \sin m \theta \\ \sigma_r(a_2) / \sin qz \sin m \theta \\ \tau_{r\theta}(a_2) / \sin qz \cos m \theta \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 / \cos qz \sin m \theta \\ w_1 / \sin qz \sin m \theta \\ v_1 / \sin qz \cos m \theta \\ u_2 / \cos qz \sin m \theta \\ w_2 / \sin qz \sin m \theta \\ v_2 / \sin qz \cos m \theta \end{Bmatrix} \quad (13)$$

また内外管パイプ変位として、コアの変形の周期性に適合する形で次式を仮定する。

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 \cdot \cos qz \sin m \theta \\ w_1 &= S_1 \cdot \sin qz \sin m \theta \\ v_1 &= T_1 \cdot \sin qz \cos m \theta \\ u_2 &= R_2 \cdot \cos qz \sin m \theta \\ w_2 &= S_2 \cdot \sin qz \sin m \theta \\ v_2 &= T_2 \cdot \sin qz \cos m \theta \end{aligned} \quad (14)$$

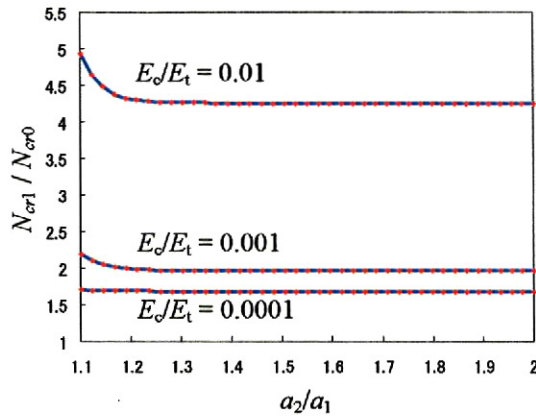
式(13)を式(14)に代入することにより、弾性体コアの反発力を内外管の変位振幅 R_i, S_i, T_i を用いて表すことができる。このことに加え、式(14)を管の支配方程式である式(1)~(3)に代入することで、以下の式が得られる。

$$[A(N_{zi}, k_{ij})] \begin{Bmatrix} R_1 \\ S_1 \\ T_1 \\ R_2 \\ S_2 \\ T_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (15)$$

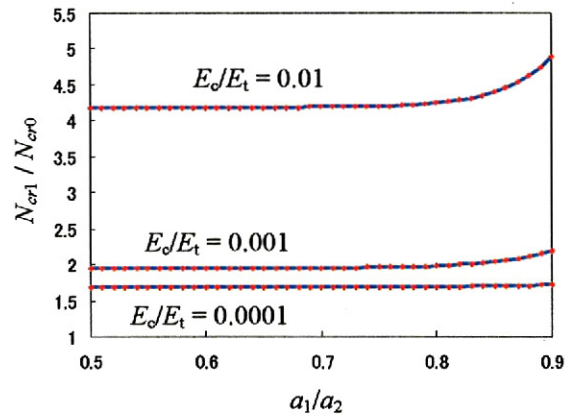
式(15)を満足する非自明な解は次式により求められる。

$$\det[A(N_{zi}, k_{ij})] = 0 \quad (16)$$

式(16)から固有値解析により、座屈荷重を導出する



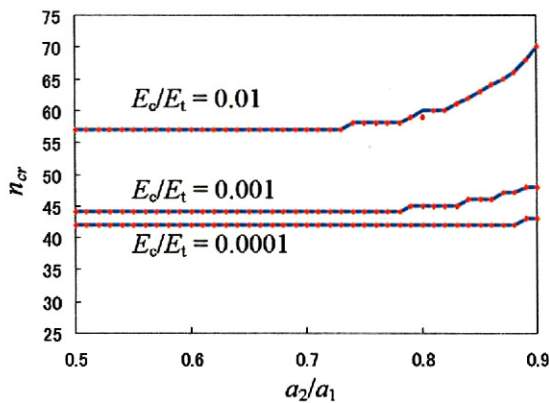
(a) 外管の座屈荷重



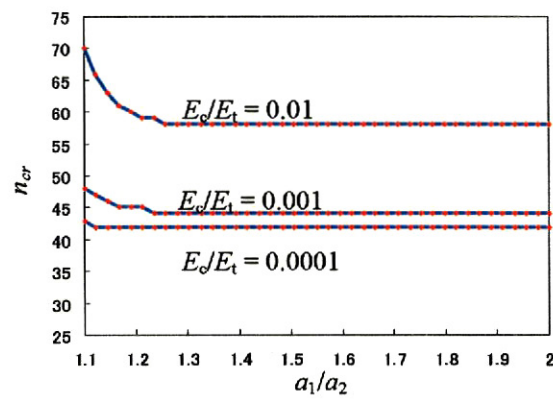
(b) 内管の座屈荷重

図-2 座屈荷重の比較

($t_1/a_1 = t_2/a_1 = 0.02$, $\nu_f = 0.3$, $\nu_c = 0.4$, 青実線: 連続体コア、赤点線: 粒状体コア)



(a) 外管の座屈荷重



(b) 内管の座屈荷重

図-3 軸方向座屈波数の比較

($t_1/a_1 = t_2/a_1 = 0.02$, $\nu_f = 0.3$, $\nu_c = 0.4$, 青実線: 連続体コア、赤点線: 粒状体コア)

ことができる。

(3) 粒状体コアの定式化

前述の通り、粒状体コアの場合、管半径方向に対してのみ断面拘束効果を発揮するが、円周方向および軸方向に対して管を拘束せず、かつコア材としての曲げ剛性を有しない。以上のことから式(13)において、半径方向剛性に関わる k_{22} , k_{25} , k_{22} , k_{25} 以外は全て 0 とすることで粒状体コアの変形による反発力を評価することとした。

4. 解析結果と考察

図-2 は内外管の座屈荷重、図-3 は軸方向座屈波数をそれぞれ示したものである。いずれも(a)は外管に対応し横軸を外径/内径比、(b)は内管に対応し横軸を内径/外径比とし、パイプに対するコアのヤング係数比 E_c/E_p を現実的な値として 0.01~0.0001 とした場合について図示している。図-2 の縦軸は単管パイプの座屈荷重で除した無次元量で表してい

るが、これよりパイプインパイプは単管パイプに対して、現実的なコアとパイプのヤング係数比とした場合、約 1.5~5 倍程度の弾性座屈に対する強度を有することがわかる。静水圧座屈では単管パイプに対してこのヤング係数比では少なくとも数十倍以上の弾性座屈強度を有していたことから、軸圧縮座屈では、静水圧座屈ほどコアの果たす力学的効果が大きくはないと結論付けられる。

また圧縮を受けるパイプの半径に対し、コア厚が 20~30% 程度以上ある場合には、座屈荷重はほぼ一定値となることが図-2 より読み取られる。これはコア厚が比較的薄い場合には、圧縮を受けていないパイプも荷重に対し抵抗するが、コア厚が厚い場合には、単管パイプに対する座屈荷重の増加分はコア厚が全て受け持つことを意味する。

さらに連続体と粒状体コアの弾性係数が等しいとした場合、連続体と粒状体コアでは座屈荷重、座屈波数ともほぼ等しくなる。これは軸圧縮座屈に対するコアの力学的役割は、コアの半径方向復元力によるものが支配的であるためであると考えられる。このことから、著者らが提案する粒状体をコア材とす

るパイプインパイプは、曲げに対する高靱性を発揮しつつ、軸圧縮に対する座屈強さを従来型のものと比較して失わない構造形式であるといえる。

パイプインパイプで粒状体コアを用いる場合、粒子密度を非常に大きくすることが構造成立の条件となり、そのため本研究での解析モデルは妥当であると判断される。しかしながら粒状体コアの場合、弾性係数の値自体をどのように評価するかという問題がある。さらに粒度、密度の条件によっては変位が微小の場合にも連続体に比べ複雑な挙動を示すこともありえる。本研究では連続体力学を起点に粒状体コアを線形ばねとしてモデル化したが、複雑な挙動に対しては粒状体力学に基づく検討も必要になるであろう。これらの点は今後の解析における研究課題として考えている。

5. まとめ

本論文はパイプインパイプにおいて静水圧、曲げとともに支配的な外力となる軸圧縮に対する座屈抵抗性について、解析的見地から考察を行ったものである。得られた知見を列挙すると以下の通りである。

(1) 内外管を薄肉円筒シェルとして、コア材を3次元弾性体としてモデル化し、弾性座屈の支配方程式を導いた。

(2) 単管パイプに比べ数倍程度の座屈荷重の増加がみられたが、コアが座屈強度に及ぼす力学的役割は静水圧作用時のそれに比べると小さいといえる。

(3) 弾性係数が等しい場合、連続体と粒状体コアでは座屈荷重、座屈波数ともほぼ等しくなる。このことから粒状体をコア材とするパイプインパイプは、曲げに対する高靱性を発揮しつつ、軸圧縮に対する座屈強さを従来型のものと比較して失わない構造形式であるといえる。

謝辞：本研究は経済産業省革新的実用原子力技術開発費補助金、および文部科学省科学研究費補助金若手研究（B）（研究代表者：佐藤太裕，研究番号：21760662，平成21～23年度）により行われたことを付記し、関係各位に御礼申し上げます。

参考文献

- 1) Kyriakides, S and Corona, E.: *Mechanics of Offshore Pipelines*, Elsevier, 2007.
- 2) Guo, B., Song, S., Chacko, J and Ghaleb, A.: *Offshore Pipelines*, Elsevier, 2005.
- 3) M. Sato and M. H. Patel: Exact and Simplified Estimations for Elastic Buckling Pressures of Structural Pipe-in-Pipe Cross-sections under External Hydrostatic Pressure, *Journal of Marine Science and Technology*, Vol.12(4), pp.251-262, 2007.
- 4) M. Sato, M. H. Patel and F. Trarieux: Static Displacement and Elastic Buckling Characteristics of Structural Pipe-in-Pipe Cross-sections, *Structural Engineering and Mechanics, An International Journal*, Vol.30(3), pp.263-278, 2008.
- 5) 佐藤太裕，嶋崎賢太，蟹江俊仁，三上 隆：パイプインパイプ断面を有する海洋パイプラインの静水圧作用時における簡易な座屈挙動評価式の検討，*海洋開発論文集*，第24巻，pp.1047-1050，2008.
- 6) 嶋崎賢太，佐藤太裕，蟹江俊仁，三上 隆：パイプインパイプ断面を有する海洋パイプラインの曲げ特性に対するコアの力学的役割について，*海洋開発論文集*，第24巻，pp.1047-1050，2008.
- 7) 佐藤太裕，渡辺香奈，白石圭祐，蟹江俊仁，赤川敏：フレキシブルパイプインパイプの提案とその曲げ特性に関する基礎的検討，*海洋開発論文集*，第25巻，pp.737-740，2009.
- 8) J. C. Yao: Buckling of axially compressed long cylindrical shells with elastic core. *J. Appl. Mech.*, Vol.29, pp.329-334, 1962.