

# 海岸工学に係わる諸関係式に対する 陽形式近似式の開発

DEVELOPMENT OF EXPLICIT APPROXIMATION FORMULAS TO IMPLICIT  
EXPRESSIONS APPEARING IN THE FIELD OF COASTAL ENGINEERING

山口正隆<sup>1</sup>・野中浩一<sup>2</sup>

Masataka YAMAGUCHI and Hirokazu NONAKA

<sup>1</sup>正会員 工博 愛媛大学大学院理工学研究科教授 生産環境工学専攻 (〒790-8577 松山市文京町3)

<sup>2</sup>正会員 博(工学) 愛媛大学契約職員 工学部環境建設工学科 (〒790-8577 松山市文京町3)

This paper presents explicit approximation formulas with high accuracy to implicit expressions and numerical integration-based estimates which often appears in the coastal engineering field. The implicit expressions are the dispersion relation (wave period and water depth-dependent wave length), a critical water depth formula for wave-induced initial sediment movement and a universal spectral moment-based width parameter in finite depth water. The integrated estimates are a minimum duration-fetch relation and a minimum fetch-duration relation in which the quantities are dimensionless. The developments enable rather accurate computation of the above-mentioned quantities by use of a hand calculator.

**Key Words :** *Explicit approximation formulas, dispersion relation, critical depth for sediment movement, spectral parameter, duration-fetch relation*

## 1. 緒言

海岸工学においても、他の分野と同様に、陰形式で表される算定式や数値積分を必要とする推定式が現われることが少なくない。もっとも最近のパソコンの処理能力の飛躍的向上によってこれらの式の数値解は短時間で得られるけれども、電卓程度の計算機の利用によって簡易的に解を得る近似式を展開することも、研究のみならず教育の面で意味ある試みと考えられる。その代表例が微小振幅波理論における分散関係式、すなわち周期 $T$ 、水深 $h$ の関数として陰形式で表される波長 $L$ の計算式である。この計算式に対して、山口・野中<sup>1)</sup>はこれまでに提示されてきた波長に対する各種の近似計算式の誤差範囲を明確にするとともに、ほぼ厳密解に近い値を与える新たな高精度近似計算式を求めた。

そこで、本研究では上記の波長の近似計算式に対する最終結果の簡単な記述に続いて、底質の移動限界水深計算のための陽形式近似式や Goda<sup>2)</sup>によって試みられた SMB 法における最小吹送時間および最小吹送距離の簡易計算式を拡張した高精度近似式、無限水深条件および有限水深条件における標準スペクトルに基づく積分特性量の1つであるスペクトル幅パラメータ $\nu$ に対する高精度近似式について説明する。これらの高精度近似式の展開におけるキーポイントは4次多項式あるいは定数項付べき乗式

( $y = ax^b + c$ ) の利用である。このうち4次式の使用は2次式や3次式では精度を確保できず、5次式では式が長すぎるという理由による。

## 2. 微小振幅波理論における波長<sup>1)</sup>

水深・深海波長比  $h/L_0$  の全範囲に有効な波数  $k = 2\pi/L$  の近似計算式は、 $L_0 = gT^2/2\pi$  ( $g$  : 重力加速度) として

①やや低い精度を許容する場合には、Carvalhoの第5式<sup>1)</sup> (相対誤差  $\delta = -0.21 \sim 0.27\%$ )

$$kh = \alpha \cdot \coth(m^\alpha \cdot \alpha^{1/2}), \quad m = 1.2, \quad \alpha = 2\pi h/L_0 \quad (1)$$

②高精度の場合には、山口・野中の第9式<sup>1)</sup> (相対誤差  $\delta = -10^{-4} \sim 10^{-4}\%$ )

$$kh = \left\{ \alpha + \beta^2 (1 - \tanh^2 \beta) \right\} / \left\{ \tanh \beta + \beta (1 - \tanh^2 \beta) \right\},$$

$$\beta = \alpha \cdot \coth(m^\alpha \cdot \alpha^{1/2}), \quad m = 1.1965, \quad \alpha = 2\pi h/L_0 \quad (2)$$

で与えられる。式(2)は分散関係式に対して、式(1)を初期値とする Newton 法による第1回目の繰返し解であるが、相対誤差の範囲が正負で同程度になるように、係数 $m$ を Carvalho の第5式<sup>1)</sup>における1.2から1.1965に変更している。式(2)は相対誤差の範囲が示すように、その精度が非常に高いうえに、 $h/L_0$  の全範囲に適用可能であるという意味で、既往の近似式よりはるかに優れている。

### 3. 底質の移動限界水深

種々の移動形態に対する底質の無次元移動限界水深  $h_i/L$  は次式<sup>3)</sup>で統一的に表される。

$$\left[ \left\{ 1 + \frac{4\pi h_i/L}{\sinh(4\pi h_i/L)} \right\} \tanh \frac{2\pi h_i}{L} \right]^{1/2} \sinh \frac{2\pi h_i}{L} = \tilde{\alpha} \left( \frac{H'_0}{L_0} \right) \left( \frac{L_0}{d} \right)^n \quad (3)$$

ここに、 $\tilde{\alpha}$ 、 $n$ ：底質の移動形態ごとに与えられる定数、 $d$ ：底質の粒径、 $H'_0$ ：相当沖波波高、 $L_0$ ：沖波波長、である。式(3)は無次元移動限界水深  $h_i/L$  について超越方程式になっているので、その値を得るためには、与えられた右辺の条件に対して Regula-falsi 法などの繰返し計算法を適用する必要がある。ここでは、これに代る無次元移動限界水深  $h_i/L$  の近似計算式を

$$\frac{L}{h_i} = ax^b + c, \quad x = \tilde{\alpha} \left( \frac{H'_0}{L_0} \right) \left( \frac{L_0}{d} \right)^n \quad (4)$$

として、 $\{x_j, (L/h_i)_j\}$  の  $m$  個の標本資料 ( $j=1 \sim m$ ) に式(4)を最小 2 乗法に基づいてあてはめ、係数  $a$ 、 $b$ 、 $c$  を算定する。しかし、 $L/h_i$  あるいは  $h_i/L$  の全範囲に対して、単一の式(4)で高精度の近似式を得ることができなかつたので、2つの式(4)を使用することとする。それぞれの近似式と相対誤差  $\delta$  の範囲は次式のように表される。

1)  $x=0.022 \sim 1.519$

$$\begin{aligned} L/h_i &= 8.1395x^{-0.66072} - 0.62786 \\ \delta &= -0.29 \sim 0.16 \% \end{aligned} \quad (5)$$

2)  $x=1.519 \sim 10.30$

$$\begin{aligned} L/h_i &= 6.1409x^{-0.95212} + 1.4256 \\ \delta &= -0.42 \sim 0.33 \% \end{aligned} \quad (6)$$

式(5)と式(6)は  $h_i/L=0.18$  でほぼ一致し、その場合の相対誤差  $\delta$  は式(5)で  $-0.08\%$ 、式(6)で  $-0.09\%$  である。また、深海波の限界である  $h_i/L=0.5$  ( $x=11.66$ ) における式(6)の相対誤差は  $\delta=0.84\%$  であり、やや大きい。式(5)あるいは式(6)によって  $h_i/L$  が得られれば、

$$\frac{h_i}{L_0} = \left( \frac{h_i}{L} \right) \tanh \frac{2\pi h_i}{L}, \quad L_0 = \frac{gT^2}{2\pi} \quad (7)$$

を用いて、移動限界水深  $h_i$  を計算できる。なお、水理公式集<sup>3)</sup>に与えられる図 5-6.13 のように、 $h_i/L_0$  と  $x$  の間の近似式を作成することも可能であるが、式(4)の形式を適用するかわり、式(5)および式(6)と同程度の精度を得るためには、 $x$  あるいは  $L_0/h_i$  あるいは  $h_i/L_0$  に関して 3 領域に分けた定式化が必要になり、実用的にあまり有用でないので、その記載を控える。

### 4. SMB 法における最小吹送時間と最小吹送距離

簡易な波浪推算法として SMB 法があり、この中で定常状態での無次元有義波高  $gH_{1/3}/U_{10}^2$  と無次元有義波周期  $gT_{1/3}/(2\pi U_{10})$  は無次元吹送距離  $gF/U_{10}^2$  の関数として周知の Wilson の IV 式<sup>4)</sup>によって与えられる。

$$gH_{1/3}/U_{10}^2 = 0.3 \left\{ 1 - \left[ 1 + 0.004 (gF/U_{10}^2)^{1/2} \right]^2 \right\} \quad (8)$$

$$gT_{1/3}/(2\pi U_{10}) = 1.37 \left\{ 1 - \left[ 1 + 0.008 (gF/U_{10}^2)^{1/3} \right]^5 \right\} \quad (9)$$

ここに、 $g$  は重力加速度、 $U_{10}$  は高度 10 m での平均風速である。

一定風速  $U_{10}$  のもとで波浪が発達する場合、一定の吹送距離  $F$  に対して波浪が定常状態になる時間が最小吹送時間  $t_{min}$  であり、これは次式により定式化される。

$$t_{min} = \int_0^F (1/C_g) dF,$$

$$gt_{min}/U_{10} = \int_0^{gF/U_{10}^2} [1/\{gT_{1/3}/(4\pi U_{10})\}] d(gF/U_{10}^2) \quad (10)$$

ここに、 $C_g$  は有義波周期  $T_{1/3}$  に対応する深海波の群速度である。式(10)は解析的に求められないので、これに対する数値積分結果か、この結果を関数化した関係が最小吹送時間の算定のために用いられる。しかし、実際の利用手続きは面倒である。

Goda<sup>2)</sup>はこの点を鑑みて、式(10)の数値積分結果を  $gF/U_{10}^2=50 \sim 50,000$  (各 10 の範囲で 1, 2, 5 のデータを使用) の範囲で簡単なべき乗式により近似している。

$$t_{min} U_{10} / F = 43 (gF/U_{10}^2)^{-0.27} \quad (11)$$

または

$$t_{min} = 1.0 F^{0.73} U_{10}^{-0.46} \quad (12)$$

式(11)の係数はべき乗式の対数変換式に対する最小 2 乗法の適用によって決定されており、有効数字 4 桁の数値では 43.11 および  $-0.2709$  である。式(11)の相対誤差  $\delta$  の正負の極大値は  $gF/U_{10}^2=50 \sim 50,000$  に対し  $gF/U_{10}^2$  の増加とともに順に  $-5.1\%$  から  $4.4\%$  ( $gF/U_{10}^2=2 \times 10^3$ ) を経て  $-7.2\%$  に変化し、使用資料の範囲外にある  $gF/U_{10}^2=10$  および  $10^5$  ではそれぞれ  $-12\%$  を越える。また、与えられた吹送時間  $t$  に対して波浪が平衡状態に達する吹送距離、すなわち最小吹送距離  $F_{min}$  は式(12)から次式のように求められる。

$$F_{min} = 1.0 \cdot t^{1.37} U_{10}^{0.63} \quad (13)$$

ここに、式(12)と式(13)における吹送距離  $F$  の単位は [km]、吹送時間  $t$  の単位は [hr]、平均風速  $U_{10}$  の単位は [m/s] である。

さて、Goda<sup>2)</sup>による式(11)の精度はGoda<sup>2)</sup>のFig. 3や上記の相対誤差の範囲にみるように、やや低いので、ここでは無次元吹送距離の対数変換値  $\log \tilde{F}$  に関する4次多項式をあてはめる。

$$\log(gt_{min}/U_{10}) = a(\log \tilde{F})^4 + b(\log \tilde{F})^3 + c(\log \tilde{F})^2 + d(\log \tilde{F}) + e, \quad \tilde{F} = gF/U_{10}^2 \quad (14)$$

そのため、式(10)の数値積分に適応型Simpson則を用いて  $gF/U_{10}^2 = 10$  で  $gt_{min}/U_{10}$  を求めたのち、 $gF/U_{10}^2 = 10^1 \sim 10^5$  の範囲に対して10倍の範囲それぞれで等間隔 (たとえば、 $10^1 \sim 10^2$  では  $1.0 \times 10^1, 2.0 \times 10^1, 3.0 \times 10^1, \dots, 9 \times 10^1$ ) に同様の積分公式を用いて  $gt_{min}/U_{10}$  を計算し、37組の ( $gF/U_{10}^2, gt_{min}/U_{10}$ ) の標本資料を得る。これらの数値は佐藤・合田<sup>5)</sup>の表-4.6に与えられた  $gt_{min}/U_{10}$  (合田) と4桁まで一致する。

つぎに、4次多項式が3点  $gF/U_{10}^2 = 10^1, 10^3, 10^5$  に対応する  $gt_{min}/U_{10}$  点を通るという条件のもとに、5つの未定係数  $a, b, c, d, e$  のうち3つを残り2つの係数の関数として確定したのち、残りの2つの係数を最小2乗法に基づいて決定する。この結果は次式で表される。

$$\log(gt_{min}/U_{10}) = 0.27865 \times 10^{-4} (\log \tilde{F})^4 - 0.95029 \times 10^{-4} (\log \tilde{F})^3 + 0.15886 \times 10^{-2} (\log \tilde{F})^2 + 0.67094 (\log \tilde{F}) + 4.0190 \quad (15)$$

3固定点通過型4次多項式の利用は未定係数の減少によって計算結果の安定化をはかるためであり、3つの固定点では当然あてはめ誤差は0になる。図-1は式(15)のあてはめ結果および式(15)の相対誤差  $\delta$  と  $gF/U_{10}^2$  の関係を与える。相対誤差  $\delta$  の正負の極大値は  $gF/U_{10}^2 = 10 \sim 10^5$  の範囲で  $gF/U_{10}^2$  の増加とともに順に  $0.011 \sim -0.007 \sim 0.025 \sim -0.039$  % の範囲で変化するにすぎず、その精度は非常に高い。

また、最小吹送距離  $gF_{min}/U_{10}^2$  に対して

$$\log(gF_{min}/U_{10}^2) = a'(\log \tilde{t})^4 + b'(\log \tilde{t})^3 + c'(\log \tilde{t})^2 + d'(\log \tilde{t}) + e', \quad \tilde{t} = gt/U_{10} \quad (16)$$

とし、前述と同様に3点、すなわち ( $gt/U_{10} = 0.2629 \times 10^3, gF_{min}/U_{10}^2 = 10$ ), ( $0.9922 \times 10^3, 70$ ), ( $0.2194 \times 10^6, 10^5$ ) を固定点として5つの未定係数  $a', b', c', d', e'$  のうち3つを残り2つの関数として確定したのち、残り2つの係数を最小2乗法に基づいて求める。この結果は次式で与えられる。

$$\log(gF_{min}/U_{10}^2) = 0.26651 \times 10^{-4} (\log \tilde{t})^4 - 0.26622 \times 10^{-2} (\log \tilde{t})^3 + 0.36900 \times 10^{-1} (\log \tilde{t})^2 + 1.29070 (\log \tilde{t}) - 5.6001 \quad (17)$$

図-2は式(17)のあてはめ結果および式(17)の相対誤差  $\delta$  と  $gt/U_{10}$  の関係を表す。相対誤差  $\delta$  の正負の

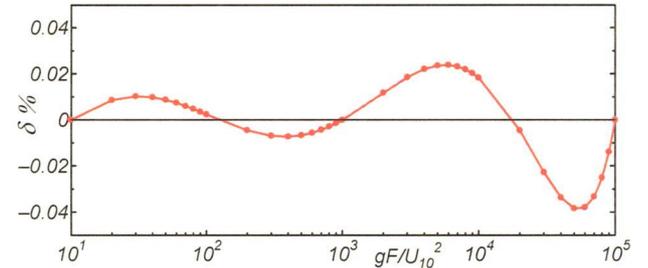
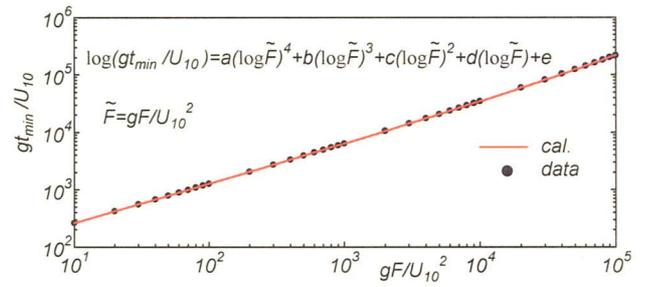


図-1 無次元最小吹送時間の近似式と相対誤差

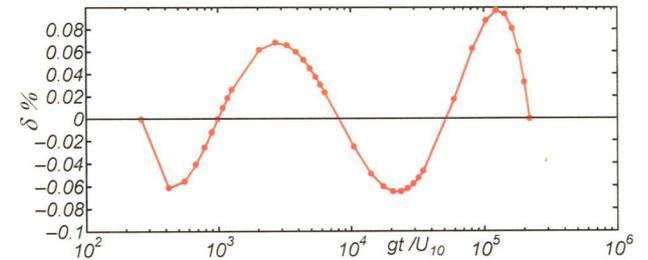
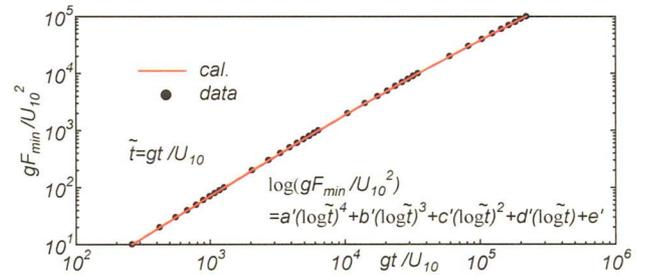


図-2 無次元最小吹送距離の近似式と相対誤差

極大値は  $gt/U_{10}$  の増加とともに順に  $-0.057 \sim 0.069 \sim -0.065 \sim 0.096$  % という変化を示し、式(17)の精度もかなり高い。

平均風速  $U_{10}$ , 吹送距離  $F$ , 吹送時間  $t$  が与えられたとき、 $F > F_{min}$  であれば、 $F = F_{min}$  として式(8)および式(9)より  $H_{1/3}$  と  $T_{1/3}$  を求め、 $F < F_{min}$  であれば、 $F$  を用いて式(8)および式(9)より  $H_{1/3}$  と  $T_{1/3}$  を算出する。また、風速、吹送距離 (風向)、吹送時間が変化する場合には、等価吹送時間  $t_{eq}$  を用いて、新しい風条件に対する状態に変換したのち、時間発達かあるいは吹送距離による平衡状態かを判定して、波浪の計算を継続する。

表-1 風波の発達計算事例

Step	1	2	3	4	5
$U_{10}$ (m/s)	18	18	24	24	18
$F$ (km)	100	100	200	200	300
$t$ (hr)	6	6	6	6	6
$t_{minG}$ (hr)	7.6	7.6	11.1	11.1	17.0
$t_{eqG}$ (hr)	6.0	12.0	10.4	16.4	28.2
$t_{minY}$ (hr)	7.3	7.3	10.6	10.6	16.5
$t_{eqY}$ (hr)	6.0	12.0	9.4	15.4	39.3
$F_{minG}$ (km)	71.9	71.9	163.5	86.2	71.9
$F_{minY}$ (km)	76.9	76.9	171.4	92.1	76.9
$H_{1/3G}$ (m)	2.87	3.25	5.85	6.04	4.72
$H_{1/3Y}$ (m)	2.95	3.25	5.71	6.04	4.72
$T_{1/3G}$ (s)	6.3	6.7	9.0	9.1	8.5
$T_{1/3Y}$ (s)	6.3	6.7	8.8	9.1	8.5
G.S.	$t$	$F$	$t$	$F$	$F$

G.S. : Growth Stage, G: Goda(2003)

Y: Yamaguchi and Nonaka(2007)

具体的な事例として、風速  $U_{10}=18$  m/s の風が吹送距離  $F=100$  km の条件で  $t=12$  時間吹送したのち、風速・風向が変化して  $U_{10}=24$  m/s,  $F=200$  km の状態が  $t=12$  時間継続し、さらに  $U_{10}=18$  m/s,  $F=300$  km の状態で吹送時間が 6 時間経過した場合の波浪の変化状況を 6 時間ごとに計算する<sup>6)</sup>。表-1 は上記の条件のもとに、最小吹送時間  $t_{min}$  および最小吹送距離  $F_{min}$  に対して式(11)および式(13)を用いた場合と式(15)と式(17)を用いた場合の計算事例を示す。ただし、式(10)による  $t_{min}$  の推定に式(9)を用いていることから、等価吹送距離  $F_{eq}$  の算出には式(9)を、ついで等価吹送時間  $t_{eq}$  の算出には Goda 式では式(12)、著者らの式では式(15)を用いる。これによると、時間発達段階（最小吹送時間  $t_{min}$  を使用）で両者に若干の相違がみられる。各近似式の精度からみて、3 固定点通過型 4 次多項式を用いる結果が元来の SMB 法を厳格に適用した結果にほぼ一致するので、3 固定点通過型 4 次多項式を用いる方がより適切と言える。なお、4 次多項式を使用する場合、電卓によってステップごとに計算を進めるのはやや面倒であるが、プログラム機能付き関数電卓であれば、計算は十分可能となる。

## 5. 有限水深条件における標準周波数スペクトルの積分特性量

### (1) 標準スペクトルとスペクトル幅パラメータ

有限水深条件における風波の標準周波数スペクトル

として、TMA スペクトル<sup>7)</sup>や FRF スペクトル<sup>8)</sup>が提案されており、山口<sup>9)</sup>、<sup>10)</sup>はこれらを包含する次の一般化 TMA スペクトル式を与えた。

$$E(f) = \alpha_m (2\pi)^{-3} u_*^5 (2\pi\mu)^{-m} \cdot f_*^{-m}$$

$$\exp\left\{-\left(\frac{m}{n}\right) f_*^{-n} (1 - Cor)\right\} \gamma^{\exp\left\{-\frac{(1-f_*)^2}{2\sigma^2}\right\}} \Phi(kh) \quad (18)$$

$$\mu = f_p u_* / g, \quad f_* = f / f_p \quad (19)$$

$$Cor = \frac{2k_p h}{m(\sinh 2k_p h + 2k_p h)} \left\{ (m-3) + \frac{4k_p h (\cosh 2k_p h + 1)}{\sinh 2k_p h + 2k_p h} \right\} \quad (20)$$

$$\Phi(kh) = \frac{(\tanh kh)^{(m-1)/2}}{1 + 2kh / \sinh 2kh} \quad (21)$$

ここに、 $E(f)$  : 周波数スペクトル、 $f$  : 周波数、 $\alpha_m$  : 平衡定数、 $f_p$  : ピーク周波数、 $\gamma$  : ピーク増幅係数、 $\sigma$  : ピーク幅パラメータ ( $\sigma = \sigma_a; f < f_p$ ,  $\sigma = \sigma_b; f > f_p$ )、 $u_*$  : 風の摩擦速度、 $\mu$  : 無次元ピーク周波数、 $h$  : 水深、 $k_p$  :  $f_p$  と  $h$  に対応する波数、 $k$  :  $f$  と  $h$  に対応する波数、である。ただし、補正係数  $Cor$  は、 $Cor=0$  とする従来の TMA スペクトル<sup>7)</sup>や FRF スペクトル<sup>8)</sup>を含む既往の一般化 TMA スペクトル<sup>9)</sup>、<sup>10)</sup>がピーク周波数  $f_p$  でスペクトルのピークをとらない特性を補正するために、新たに加えた項<sup>11)</sup>である。

つぎに、一般化 TMA スペクトルの  $k$  次積率は次式で表される。

$$M_k = \int_0^\infty f^k E(f) df = A \cdot f_p^{k+1} \left[ \int_0^\infty f_*^{k-m} \exp\left\{-\left(\frac{m}{n}\right) f_*^{-n} (1 - Cor)\right\} \gamma^{\exp\left\{-\frac{(1-f_*)^2}{2\sigma^2}\right\}} \Phi(kh) df_* \right] = A \cdot f_p^{k+1} \tilde{M}_k \quad (22)$$

$$A = \alpha_m (2\pi)^{-3} u_*^5 (2\pi\mu)^{-m} \quad (23)$$

$$M_0 = \int_0^\infty E(f) df = A \cdot f_p \tilde{M}_0, \quad \tilde{M}_0 = \varepsilon \quad (24)$$

ここに、 $\tilde{M}_k$  および  $\tilde{M}_0$  は式(22)の [ ] 内で示される。一般化 TMA スペクトルに基づく積分特性量のうち、無次元全エネルギー  $\varepsilon$  や各種の平均周期に対する結果は Yamaguchi et al.<sup>11)</sup> に与えていることから、ここでは、Longuet-Higgins<sup>12)</sup> によるスペクトル幅パラメータ  $\nu$  を取り扱う。これは次式で定義される。

$$\nu^2 = \frac{M_0 \cdot M_2}{M_1^2} - 1 = \frac{\tilde{M}_0 \tilde{M}_2}{\tilde{M}_1^2} - 1 \quad (25)$$

ここで、 $\Gamma$  関数で表される積分公式

$$\int_0^\infty f_*^{-(k+m)} \exp\left\{-\left(\frac{m}{n}\right) f_*^{-n}\right\} df_* = \frac{1}{n} \frac{\Gamma\left[\frac{(-k+m-1)/n}{n}\right]}{(m/n)^{(-k+m-1)/n}} \quad (26)$$

を用いれば、無限水深条件 ( $kh \rightarrow \infty$ ,  $\Phi(kh)=1$ ;  $k_p h \rightarrow \infty$ ,  $Cor=0$ ) で  $\gamma=1$  の場合、 $v$  は次式になる。

$$v^2 = \frac{\Gamma[(m-1)/n] \cdot \Gamma[(m-3)/n]}{\Gamma[(m-2)/n]^2} \quad (27)$$

小数点4桁で  $m=5$ ,  $n=4$  に対して  $v=0.4247$  である。

### (2) スペクトル幅パラメータの標本資料の作成

標準スペクトルにおけるパラメータ  $m$ ,  $n$ ,  $\sigma_a$ ,  $\sigma_b$  を固定したうえで、 $\gamma=1 \sim 10$  の14ケース (1~5 を0.5で分割, 6~10を1で分割),  $T_p \sqrt{g/h} = 1 \sim 50$  の131ケース (1~10を0.1で分割, 11~50を1で分割) の計  $14 \times 131 = 1,834$  ケースについて、 $k=0, 1, 2$  のスペクトル積率  $\bar{M}_k$ , したがってスペクトル幅パラメータ  $v$  を、 $f/f_p = f_* = 0 \sim 70$  の範囲に対する適応型 Simpson 則に基づく数値積分値と  $f_* = 70 \sim \infty$  の範囲に対する解析解の和<sup>11)</sup>として算出する。ここに、 $T_p = (1/f_p)$ : ピーク周期、である。 $T_p \sqrt{g/h}$  は分散関係式

$$\left(2\pi/T_p \sqrt{g/h}\right)^2 = k_p h \cdot \tanh k_p h, \quad k_p h = 2\pi h/L_p \quad (28)$$

を通じて  $h/L_p$  ( $L_p$ : ピーク周期  $T_p$  と水深  $h$  に対応する波長) に変換される。解析解は標準スペクトルにおいて  $f_*$  のべき乗項を除く項が  $f_* = 70$  で実質的に1になることを利用して求める。また、無限水深条件の場合に別途行った数値積分の結果は、 $T_p \sqrt{g/h} = 1$  に対する結果と計算機の有効桁数内で一致する。

ここでは、 $m=5$ ,  $n=4$ ,  $\sigma_a=0.07$ ,  $\sigma_b=0.09$ ,  $Cor \neq 0$  の(修正) TMA スペクトル<sup>11)</sup>, (無限水深条件では JONSWAP スペクトル<sup>13)</sup>に帰着) の場合の  $v$  に対する近似式を述べる。

### (3) スペクトル幅パラメータに対する近似式

スペクトル幅パラメータ  $v$  は他の積分特性量と同様に、 $m$ ,  $n$ ,  $\sigma_a$ ,  $\sigma_b$  の固定値に対して、無限水深条件では  $\gamma$  の関数、有限水深条件では  $\gamma$  と  $h/L_p$  の関数として与えられる。まず無限水深条件の場合、スペクトル幅パラメータ  $v$  に対する高い精度の近似式を得るために、4. で述べたと同様に3固定点通過型4次多項式を適用する。

$$v_{deep} = a\gamma^4 + b\gamma^3 + c\gamma^2 + d\gamma + e \quad (29)$$

式(29)が  $\gamma=1$ ,  $\gamma=10$  および  $\gamma$  の中間点  $\gamma_m$  でそれぞれの積分値  $v_{deep}(\gamma=1)$ ,  $v_{deep}(\gamma=10)$ ,  $v_{deep}(\gamma=\gamma_m)$  を満たすという条件のもとに5つの未定係数を2つに減少させたのち、 $\gamma=1 \sim 10$  の14ケースの ( $\gamma$ ,  $v_{deep}$ ) 標本資料に式(29)をあてはめ、最小2乗法によりこれら2つの係数を決定する。なお、山口<sup>14)</sup> にならって

$$v_{deep} = a \cdot \gamma^b + v_{0deep} - a, \quad v_{0deep} = v_{deep}(\gamma=1) \quad (30)$$

を利用することも可能であるけれども、その最大相

対誤差が0.5%に達することを考慮して、上記の式(29)を使用する。

つぎに有限水深条件では、無限水深条件における  $v_{deep}$  で基準化した  $v/v_{deep}$  に対して

$$\frac{v}{v_{deep}} = \left\{ 1 + \frac{r(k_p h)^u}{\sinh r(k_p h)^u} \right\}^p \cdot \left\{ \tanh s(k_p h)^w \right\}^q \quad (31)$$

をあてはめ、6つの未定係数  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$ ,  $u$ ,  $w$  を求める。標本資料数は  $\gamma$  の各ケースについて131である。式(31)の右辺は  $k_p h \rightarrow \infty$  で1に漸近する。

実際の数値計算において最適解を構成する6つの係数を算出するのは困難であるので、後の3つの係数 ( $s$ ,  $u$ ,  $w$ ) を固定したうえで、式(31)の対数変換式に対する最小2乗解を求める。係数 ( $s$ ,  $u$ ,  $w$ ) はそれぞれ0.1~3の範囲で0.1ごとに変化させて合計27,000ケースを計算し、あてはめの相対誤差ができるだけ小さく、しかも正負の相対誤差が同程度である係数の組み合わせを准最適解として抽出する。このようにして得られる係数 ( $p$ ,  $q$ ,  $r$ ) はそれぞれ  $\gamma$  の関数で表されるので、これを式(30)と同じ形の定数項付きべき乗式、たとえば  $p$  に対して

$$p = a_p \gamma^{b_p} + p_0 - a_p; \quad p_0 = p(\gamma=1) \quad (32)$$

あるいは式(32)の精度が不足する場合には式(29)と同じ形の3固定点通過型4次多項式を適用する。たとえば  $p$  に対して

$$p = a_p \gamma^4 + b_p \gamma^3 + c_p \gamma^2 + d_p \gamma + e_p \quad (33)$$

であり、 $\gamma=1$ , 10および中間点  $\gamma_m$  で  $p$  の入力資料値を満足するようにする。

以上の手法をまとめると、有限水深条件の場合スペクトル幅パラメータ  $v$  を

$$v = \text{Eq.(29)} \times \text{Eq.(31)} \quad (34)$$

で近似することになる。

あてはめ結果とその相対誤差の範囲は無限水深条件に対して、

$$v_{deep} = -0.44634 \times 10^{-6} \gamma^4 - 0.16432 \times 10^{-4} \gamma^3 + 0.91935 \times 10^{-3} \gamma^2 - 0.18876 \gamma + 0.44264 \quad (35)$$

$$\delta_{v_{deep}} = -0.02 \sim 0.02 \%, \quad (36)$$

有限水深条件に対して

$$v = v_{deep} \cdot \left\{ 1 + \frac{r(k_p h)^{1.7}}{\sinh r(k_p h)^{1.7}} \right\}^p \cdot \left[ \tanh \left\{ 2.9(k_p h)^3 \right\} \right]^q$$

$$p = 0.29037 \gamma^{0.27871} + (0.25356 - 0.29037)$$

$$q = -0.12536 \times 10^{-5} \gamma^4 + 0.32191 \times 10^{-4} \gamma^3 - 0.25987 \times 10^{-3} \gamma^2 - 0.23636 \times 10^{-3} \gamma - 0.10106$$

$$r = -0.61096 \times 10^{-4} \gamma^4 + 0.14450 \times 10^{-2} \gamma^3 - 0.011245 \gamma^2 + 0.026837 \gamma + 2.9148 \quad (37)$$

$$\delta_v = -0.98 \sim 2.72 \%, \quad (38)$$

である。図-3は無限水深条件での  $v_{deep}$  に対する近似式のあてはめ結果と相対誤差を、図-4は有限水深条件での  $v$  に対するあてはめ結果と相対誤差を与え

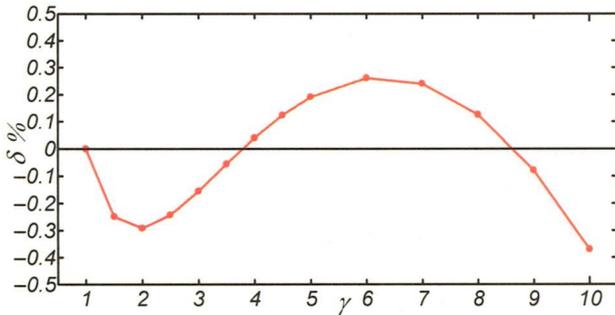
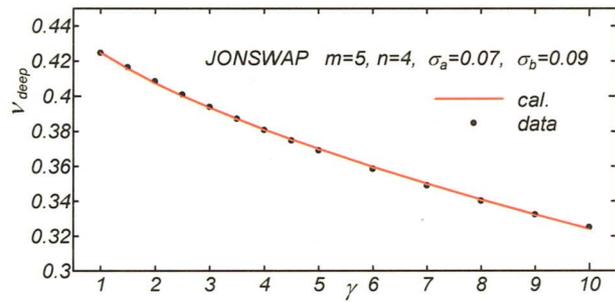


図-3 スペクトル幅パラメータ  $\nu_{deep}$  に対する近似式と  
相対誤差 (JONSWAPスペクトル)

る。近似式の適合度は有限水深条件においても良好であるが、 $h/L_p = 0.3 \sim 0.5$  の領域における相対誤差がやや大きい。

## 6. 結語

本研究では、海岸工学分野において現われる陰形式の関係式や数値積分を要する推定式に対する高精度近似式を波長、移動限界水深、最小吹送時間と最小吹送距離および無限水深条件と有限水深条件における標準スペクトルのスペクトル幅パラメータについて作成し、その精度を明らかにした。これらの諸式はそれぞれ研究面だけでなく教育面においても有用と考えられる。

## 参考文献

- 1) 山口正隆・野中浩一：微小振幅波理論に基づく波長の近似計算式の相互比較，水工学論文集，第51巻，pp. 1421-1426，2007。
- 2) Goda, Y. : Revisiting Wilson's formulas for simplified wind-wave prediction, Jour. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., ASCE, Vol.129, No.2, pp.93-95, 2003.
- 3) 土木学会：水理公式集[平成11年度版]，第5編海岸・港湾編，第6章6.3，6.3.1漂砂の移動限界，pp. 514，1999。
- 4) 土木学会：水理公式集[平成11年度版]，第5編海岸・港湾編，第2章2.2，2.2.2有義波法による波浪推算，pp. 450，1999。
- 5) 佐藤昭二・合田良實：海岸・港湾，わかり易い土木

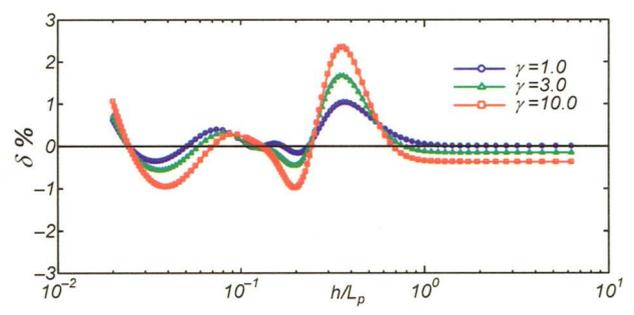
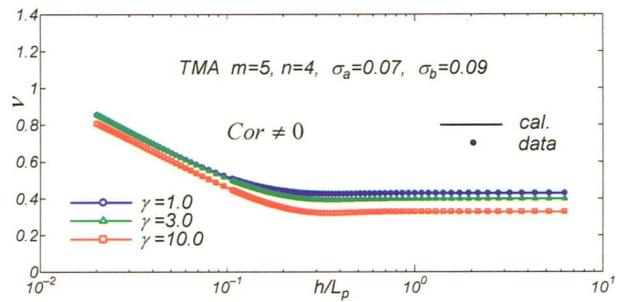


図-4 スペクトル幅パラメータ  $\nu$  に対する近似式と  
相対誤差 (TMAスペクトル)

講座17，彰国社，pp.110，1972。

- 6) 土木学会：水理公式集例題集（昭和60年版），第6編海岸・港湾編 例題6.2（光易 恒），pp. 250-251，1988。
- 7) Bouws, E. et al.: Similarity of the wind wave spectrum in finite depth water I: Spectral form, Jour. Geophys. Res., Vol.90, No.C1, pp.975-986, 1985.
- 8) Miller, H.C. and C.L. Vincent: FRF spectrum: TMA with Kitaigorodskii's  $f^{-4}$  scaling, Jour. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., ASCE, Vol.116, No.1, pp.57-78, 1990.
- 9) 山口正隆：風波の標準スペクトルに対する一般式の提案，第35回海岸工学講演会論文集，pp. 158-162，1988。
- 10) 山口正隆：一般化された標準風波スペクトルの適用性について，愛媛大学工学部紀要，第12巻1号，pp. 395-403，1990。
- 11) Yamaguchi, M., Holthuijsen, L. and H. Nonaka: Correction to generalized TMA and Thornton spectra and their approximate integral quantities, Eng. Jour., Ehime Univ., Vol.7, pp.111-121, 2008 (CD-ROM).
- 12) Longuet-Higgins, M.S.: On the joint distribution of the periods and amplitudes of sea waves, Jour. Geophys. Res., Vol.80, No.18, pp.2688-2694, 1975.
- 13) Hasselmann, K. et al.: Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP), Deutsch. Hydrogr. Zeit., A8, No.12, pp.1-95, 1973.
- 14) 山口正隆：JONSWAPスペクトルの積分特性量に対する高精度近似式について，土木学会論文集，第345/II-1（ノート），pp. 149-152，1984。