

カルテシアン・カットセル法を用いた 津波の伝播変形計算手法の開発

DEVELOPMENT OF CALCULATION MODEL FOR TSUNAMI PROPAGATION USING CARTESIAN CUTCELL METHOD

安田誠宏¹・小西秀誉²・間瀬 肇³・Clive G. Mingham⁴・Derek M. Causon⁵

Tomohiro YASUDA, Hidetaka KONISHI, Hajime MASE,
Clive G. MINGHAM and Derek M. CAUSON

¹ 正会員 博(工) 京都大学助教 防災研究所 (〒611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

² 京都大学大学院 工学研究科 都市環境工学専攻 (〒615-8530 京都府京都市西京区京都大学桂)

³ 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所 (〒611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

⁴ Reader, Department of Computing and Mathematics, Manchester Metropolitan University, Manchester, UK

⁵ Professor, Department of Computing and Mathematics, Manchester Metropolitan University, Manchester, UK

Geometrical coastal line in big maritime cities is usually complex, since there are many reclaimed lands, many rivers and canals flowing into the sea. For such complex sea area, fine mesh scale is required for the estimation of tsunami propagation and deformation, resulting in increase in the computational time and cost. In this study, a new calculation method, called the Cartesian cutcell method, is used for predicting tsunami propagations and the numerical results are compared with the experimental observations. In the Cartesian cutcell method, the finer mesh is not required even for the complex geometrical coastal shape.

Key Words : *Tsunami, Cartesian cutcell method, Numerical simulation*

1. はじめに

大都市沿岸においては、埋立地造成による開発が進められ、また、幾重にも分岐した河川の河口や運河があり、沿岸地形形状が複雑である。このような複雑な海岸線を持つ沿岸に襲来する津波の予測に対しては、広域的・局所的な現象を再現する必要がある。従来の非線形長波理論を直交格子座標上で数値積分する津波伝播計算においては、沿岸地形は、ギザギザの階段状に近似表現される。海岸線の近似による計算誤差を小さくし、沿岸津波の予測精度を上げるためには格子間隔を細かくする必要があるが、計算格子数の増加は計算時間の増大に繋がる。

本研究では、計算時間・コストを維持したまま計算精度の向上が期待できる、カルテシアン・カットセル法に着目した。この方法は当初、航空宇宙分野で開発された。概念的には非常に簡潔なもので、固体境界付近で生成される流体領域と固体領域が混在する計算格子が、流体領域の計算格子同様、直接に流体計算が行われる。また、計算スキームも非常に

効率的で、流れの場と境界に関する計算格子のデータをメモリに保存することにより計算が実行される。したがって、複雑沿岸地形や、河川のような蛇行した領域を、直交格子を用いて容易に取り扱うことができる。さらに、直交格子において境界面を含む直交格子内の計算も他の流体格子と同様に計算することができ、特別な計算格子生成の手間を省くことができる。

本手法の導入により、直交格子座標を用いても境界の形状を表現する能力が飛躍的に向上するため、計算時間・コストの増大を抑えながら、複雑な沿岸地形の再現精度が向上する。これは、今後、都市沿岸域の津波変形予測を行う際、局所的な地形要因による津波の増幅や減衰を予測する上で、大きなメリットになると考えられる。

そこで、本研究では、カルテシアン・カットセル法を導入した数値解析モデルを用いて、津波の島への遡上および回り込み現象や計算領域内で斜めに配置されている水路における津波の伝播変形計算を実施し、従来型の非線形長波解析モデルによる計算結果

や実験結果との比較を行うことで、その予測再現精度および有用性の検討を行う。

2. 数値解析モデル AMAZON-CC

本研究では、カットセル法を導入した数値解析モデル AMAZON-CC¹⁾を用いる。AMAZON-CCは Manchester Metropolitan Universityで開発された2次元浅海長波の解析モデルである。以下に、その概要を示す。

(1) 支配方程式

AMAZON-CCで用いる方程式は、Navie-Stokes方程式を海底から水面までを鉛直に積分した運動方程式と連続式から成る。以下に、保存系の方程式を示す。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = Q_s + \frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y} \quad (1)$$

ここで、

$$U = \begin{bmatrix} \phi \\ \phi u \\ \phi v \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \phi u \\ \phi u^2 + \frac{\phi^2}{2} \\ \phi uv \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \phi v \\ \phi uv \\ \phi v^2 + \frac{\phi^2}{2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

なるベクトルであり、また

$$Q_s = A + B + C + D \quad (3)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ fv\phi \\ -fu\phi \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{g}{\rho}\tau_{xw} \\ \frac{g}{\rho}\tau_{yw} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{g}{\rho}\tau_{xf} \\ -\frac{g}{\rho}\tau_{yf} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi gb_x \\ \phi gb_y \end{bmatrix} \quad (4)$$

である。すなわち、 F と G は対流フラックスベクトル、 A はコリオリ力、 B は海面せん断応力、 C は底面せん断応力、 D は重力項で、 Q_s は外力項である。粘性フラックスベクトル F_v と G_v は、次式で与えられる。

$$F_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{xx} \frac{\phi}{\rho} \\ \tau_{yx} \frac{\phi}{\rho} \end{bmatrix}, G_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \frac{\phi}{\rho} \\ \sigma_{yy} \frac{\phi}{\rho} \end{bmatrix} \quad (5)$$

なお、以上の式中の変数について、 f はコリオリ力、 g は重力加速度、 ρ は水の密度、 u と v は x 方向および y 方向の速度、 ϕ は位置エネルギー(= gh 、 h は全水深)、 τ_{xw} と τ_{yw} は x 方向および y 方向の海面

せん断応力、 τ_{xf} と τ_{yf} は x 方向および y 方向の底面せん断応力、 σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 τ_{xy} 、 τ_{yx} は垂直応力とせん断応力、 b_x および b_y は底面勾配である。

不連続な問題をリーマン問題として解くために、式(1)を双曲型の積分形に書き換える。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A U dA + \oint_S H \cdot ndS = \int_A Q_s dA + \oint_S H_v \cdot ndS \quad (6)$$

ここで、 $H = \langle F, G \rangle$ 、 $H_v = \langle F_v, G_v \rangle$ 、 A は領域 S によって閉じられた空間である。粘性項とソース項は本研究では考慮しないので、次式となる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V U dV + \oint_S H \cdot ndS = 0 \quad (7)$$

ここで、

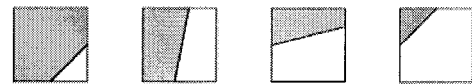
$$H = \begin{pmatrix} \phi v \\ \phi uv + \frac{1}{2}\phi^2 i \\ \phi uv + \frac{1}{2}\phi^2 j \end{pmatrix} \quad (8)$$

である。式(6)の離散化に関しては、Godunovタイプの2段階高解像度風上差分スキームであるMUSCL-Hancock有限体積法を適用する。詳細は、原著論文を参照されたい^{2),3)}。

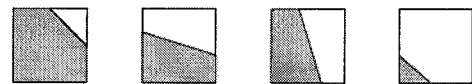
(2) カットセルの取り扱い

a) カットセルの定義

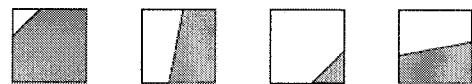
カットセルとは、対象領域の地形形状によって、一つの格子内に流体領域と固体領域が混在するような計算格子のことである。図-1に示すように、カットセルの種類は固体領域と流体領域の境界線の角度によって大きく4種類に分けられ、流体と固体の存在



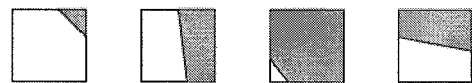
(1) Sub-Type One ($0^\circ < Q \leq 90^\circ$)



(2) Sub-Type Two ($90^\circ < Q \leq 180^\circ$)



(3) Sub-Type Three ($180^\circ < Q \leq 270^\circ$)



(4) Sub-Type Four ($270^\circ < Q \leq 360^\circ$)

図-1 カットセルの種類

領域の違いからさらに細かく4種類に分類する。これらカットセルの位置情報は、境界線の進入角度と位置により決定され、計算の初期段階でリスト化して保存される。

カットセル法は直行格子上でセルを横切る固体境界の方向・位置を正確に求め、その境界面に対する境界条件を用いる。カットセル法に似た方法としてFAVOR法⁴⁾がある。この方法は、直交格子上で任意の物体形状をボラス値（面積・体積占有率）によってモデル化するものであるが、固体境界の正確な位置情報は考慮しない。

b) 計算方法

空間に対して2次の精度を保つために、流体部分の勾配の計算には中央差分を用いる。勾配の計算は近接する計算格子の中央の値を用いて、中央差分により算出する。オーバーシュートやアンダーシュートを防ぐため制限関数を用いる。

カットセルには異なる勾配計算が必要である。図-2を用いて、カットセルにおける勾配計算方法について説明する。

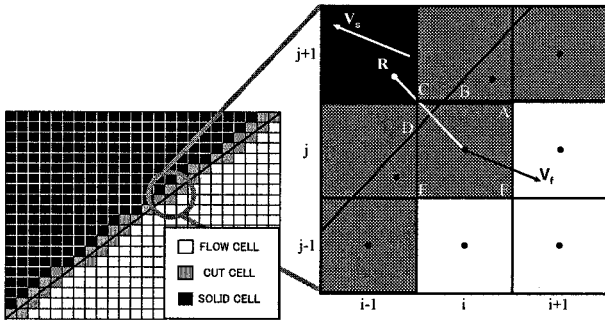


図-2 カットセル概念図と計算方法

固体境界を反射条件とし、以下の式にしたがって仮想セル R の値を定義する。

$$\left. \begin{aligned} \phi_R &= \phi_{ij} \\ v_R &= v_{ij} - 2(v_{ij} \cdot n)n \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

カットセル (i, j) における物理量の勾配は、流体部分の物理量と式(9)で定義した仮想セル R の物理量のそれぞれの勾配を用いて求める。この2種類は以下の式によって、別々に計算される。流体部分は、

$$U_x^f = G \left(\frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}}, \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}} \right) \quad (10)$$

$$U_y^f = G \left(\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}, \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}} \right) \quad (11)$$

であり、 $\Delta x_{i+\frac{1}{2},j} = x_{i+1,j} - x_{i,j}$ 、 $\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}} = y_{i,j+1} - y_{i,j}$ である。

仮想セル R では、

$$U_x^s = G \left(\frac{U_R - U_{i,j}}{\Delta x_{i,R}}, \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}} \right) \quad (12)$$

$$U_y^s = G \left(\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}, \frac{U_{i,j} - U_R}{\Delta y_{j,R}} \right) \quad (13)$$

であり、 $\Delta x_{i,R} = x_R - x_{i,j}$ 、 $\Delta y_{j,R} = y_{i,j} - y_R$ である。 G は制限関数であり、以下のいずれかを用いる。

1. The Superbee limiter

$$G(a, b) = s \cdot \max[0, \min(2|b|, s \cdot a), \min(|b|, 2s \cdot a)] \quad (14)$$

ただし、 $s = \text{sign}(b)$ である。

2. The van Leer limiter

$$G(a, b) = \frac{a|b| + |ab|}{|a| + |b|} \quad (15)$$

それぞれの勾配計算が行われた後に、式(9)~(13)を用いて、カットセルにおける勾配が辺の長さの平均値として次式で求められる。

$$U_x = \frac{\Delta y_s U_x^s + \Delta y_f U_x^f}{\Delta y} \quad (16)$$

$$U_y = \frac{\Delta x_s U_y^s + \Delta x_f U_y^f}{\Delta x} \quad (17)$$

ここで、 $\Delta x_f = |AB|$ 、 $\Delta x_s = |BC|$ 、 $\Delta y_s = |CD|$ および $\Delta y_f = |DE|$ である。 Δx と Δy はカットされていないセルの x 方向および y 方向の辺の長さである。

$\Delta x_f + \Delta x_s = \Delta x$ かつ $\Delta y_s + \Delta y_f = \Delta y$ の時、 $\Delta y_s = 0$ ならば $\Delta y_f = \Delta y$ となり、 $U_x = U_x^f$ が成り立つ。逆に、

$\Delta y_f = 0$ ならば $\Delta y_s = \Delta y$ となり、 $U_x = U_x^s$ が成り立つので、 U_x と U_y はカットセルの勾配ベクトルの構成要素であるといえる。

$$\nabla U_{i,j} = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \end{bmatrix} \quad (18)$$

上式の勾配ベクトル $\nabla U_{i,j}$ が設定できれば、再構成された解ベクトル $U(x, j)$ は、以下の式によってカットセル内のいかなる位置においても算定することができる。

$$U(x, j) = U_{i,j} + r \cdot \nabla U_{i,j} \quad (19)$$

ここで、 r はセル中央から固体境界への法線距離ベクトルである。

3. 解析条件

(1) 島への津波遡上・回折

解析精度の検証のため、Liu et al.⁵⁾の実験結果と比較する。

図-3は、実験装置の平面図と波高計設置位置を示したものである。図中の番号は、設置された波高計の番号を示している。実験水槽中央に設置された、島を模した円錐台の地形の断面図を図-4に示す。水深は0.32mである。図-3の矢印の方向に、造波機によって孤立波が造波された。また、孤立波の波高水深比は0.1であった。詳細な実験条件を表-1に、波高計の座標を表-2に示す。実験領域の周囲境界は、

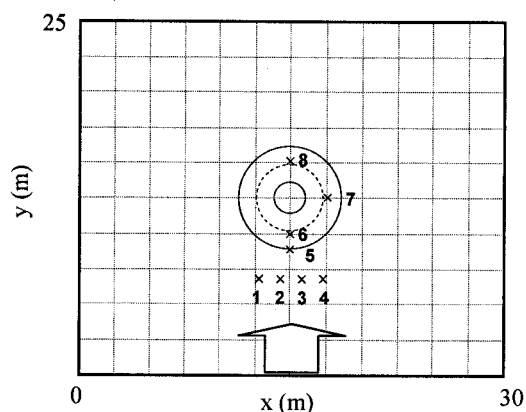


図-3 実験装置配置図

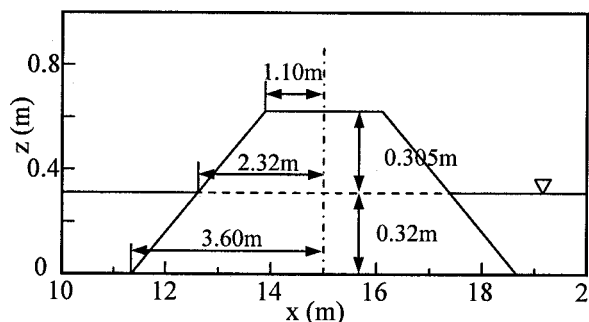


図-4 島の断面図

表-1 解析条件

領域		30×25 (m)
セル数		300×250
水深		0.32 (m)
入射波 (孤立波)	最大波高/初期水深	0.1
	最大波高	0.032 (m)

表-2 波高計位置座標

地点	座標(x,y) (m)	地点	座標(x,y) (m)
1	(12.75, 6.85)	5	(15.00, 9.40)
2	(14.25, 6.85)	6	(15.00, 10.40)
3	(15.75, 6.85)	7	(17.58, 13.00)
4	(17.25, 6.85)	8	(15.00, 15.60)

反射波を吸収するようにされていた。

AMAZON-CCによる解析も実験と同条件で行い、領域境界は透過境界とし、反射波が発生しないようにした。

(2) 分岐水路における津波変形

分岐水路に関しては、河川への津波の伝播を想定した実験結果との比較を行う。また、後藤・佐藤⁶⁾の従来の非線形長波解析モデルによる出力とも比較を行うことで、カットセル法による結果との相違を検討する。

図-5に示す分岐水路において、矢印方向から孤立波を入力し、1~15と示された各点での波形比較を行う。実験条件の詳細は表-3に、波形比較点1~15の座標を表-4に示す。実験における領域右側の境界条件は、上部水路および下部水路ともに透過境界とした。

従来の非線形長波解析モデルでは、解析条件をフルード相似則に基づいて縮尺が10倍になるようにスケールアップした諸量を用いた計算を行った。これは、今回使用した非線形長波解析モデルでは、実験スケールそのままの諸量では計算ができなかったためである。

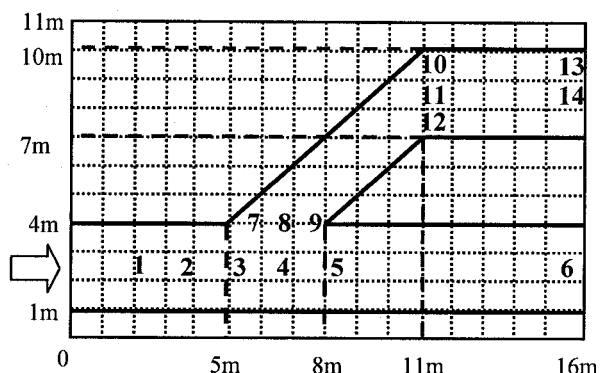


図-5 分岐水路と波高計の設置点

表-3 解析条件

領域		16×11 (m)
セル数		160×110
水深		0.2 (m)
入射波 (孤立波)	最大波高/初期水深	0.575
	最大波高	0.115(m)

表-4 波高計位置座標

地点	座標 (m)	地点	座標 (m)
1	(20, 25)	9	(75, 40)
2	(35, 25)	10	(110, 95)
3	(50, 25)	11	(110, 85)
4	(65, 25)	12	(110, 75)
5	(80, 25)	13	(155, 95)
6	(155, 25)	14	(155, 85)
7	(55, 40)	15	(155, 75)
8	(65, 40)		

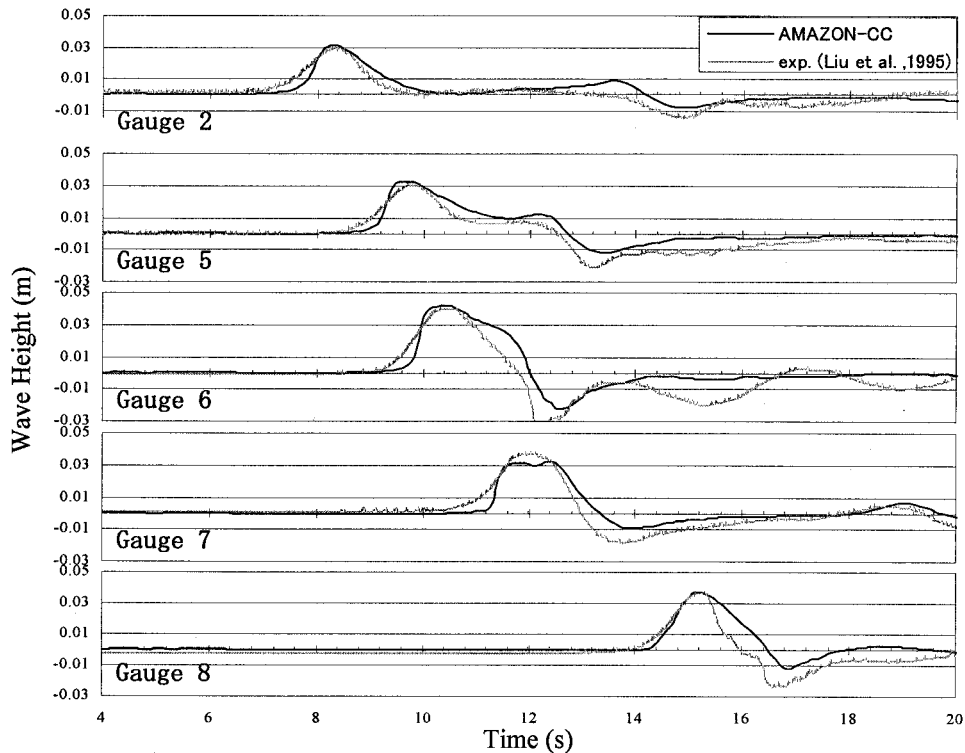


図-6 波形の時間変化（島）

4. 解析結果および考察

(1) 島への津波遡上・回折

Liu et al.⁵⁾の実験で得られた実測値と解析波形を比較したものを図-6に示す。

波高計2は、初期波形を表している。波高計2と5の波形から、孤立波があまり変化することなく伝播していることがわかる。波高計6-8の波形から、遡上域での波の挙動や回折は十分な精度で再現できていることがわかる。ただし、引き波時の水位低下に関しては、若干の差がみられる。実験では、遡上域の波高計6の時刻15s付近において引き波が観測されているが、AMAZON-CCでは再現されていない。このような若干の差異はみられるが、すべての観測点において波形や押し波時のピークは実験結果とほぼ一致しており、十分な精度の計算結果であることが確認できた。

(2) 分岐水路における津波変形

実験結果、AMAZON-CCおよび従来型の非線形長波解析モデルによる計算波形を図-7に示す。なお、波形はそのピーク値によって、時間は半波長に対応する周期である4.2sで正規化している。

AMAZON-CCについては、波高計1-2における比較から、計算波形は実測波形とほぼ一致している。波高計3では、津波到達時間が早くなり、徐々に波形が立ち上がって前傾化している。波高計6および9では、到達時間に進みがみられるが、波高計3における時間差と変わっておらず、実験による孤立波の速度と一

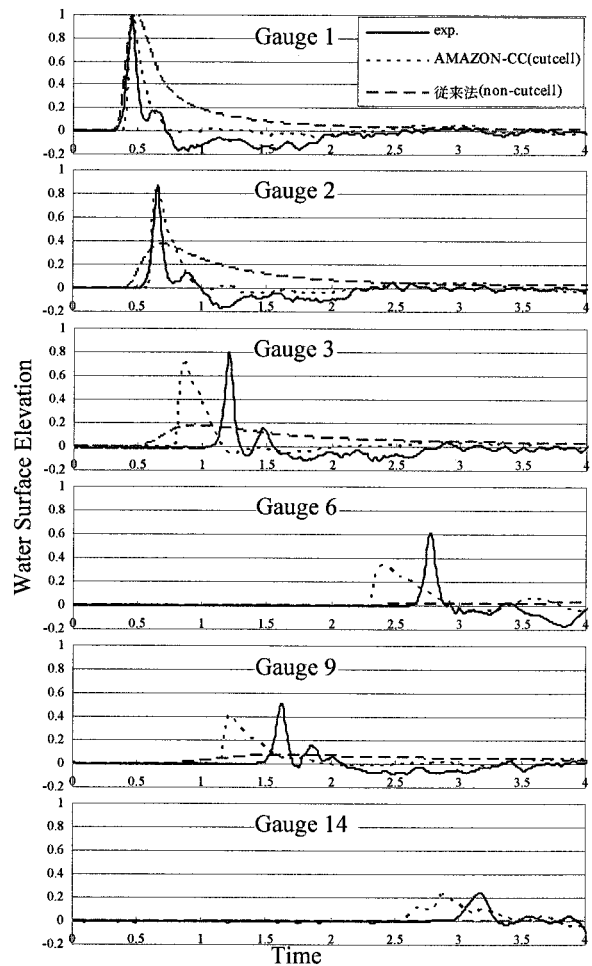


図-7 波形の時間変化（分岐水路）

致していると考えられるが、計算波形は実測波形よりもかなり前傾している。波高計6の時刻3.7付近と波高計14の時刻2~3付近で、島への津波遡上・回折の実験比較での知見と同様に、引き波時の水位低下に関して若干の差異がみられる。波高計14では、同様に、計算波形の進みと前傾化が認められる。波高のピーク値は一致しており、上部水路への流入が再現されていることも確認できる。

一方、従来解析モデルについては、波高計1~3および6における波形を比較してわかるように、平坦化が急激に進み、減衰が顕著である。さらに、波高計9をみると、上部水路への波の流入がほとんど無く、波高計14では波が消滅している。これは、下部水路から上部水路に通じる斜めの水路で、地形が階段状に表現されていることにより、反射が顕著になり、上部水路への流入がなくなったためと考えられる。

以上のことから、AMAZON-CCに関する波の挙動と、進行時間の再現性については、従来型の解析モデルに比べて満足のいく結果が得られた。なお、AMAZON-CCでは分散性が考慮されていないので、図-7の実験結果にみられるソリトン分裂波は再現できないが、第1波目の主要部についてはそのピーク値を概ね再現できた。

5. 結論

本研究では、カルテシアン・カットセル法を用いた数値解析モデル (AMAZON-CC) の有用性を、実験結果および既往の手法による計算結果との比較によって検証した。主要な結果を以下にまとめる。

実験結果との比較によって、AMAZON-CCの解析結果の妥当性が確認できた。しかしながら、引き波時のピークに関しては、概して過小に評価される傾向があった。また、実験結果と既往モデルによる出力との比較によって、本手法での優位性がわかった。

しかし、実験結果に比べて時間にずれが生じており、さらに検討と改良が必要である。

AMAZON-CCの算定精度は実用に耐えうるものであるが、波形の前傾化や時間のずれなどの解決すべき問題があることも確認できた。今後の改良によって、大阪湾のような沿岸都市部の詳細な津波解析に適用を展開していくつもりである。

謝 辞：

本研究で用いたプログラムAMAZON-CCに関して、有益な助言を頂いたマンチェスターメトロポリタン大学の博士課程学生Andrew Morris氏に深く感謝を申し上げます。また、分岐水路での実験データを提供していただいた金沢大学の由比政年教授に合わせて感謝致します。

参考文献

- 1) Causon, D., Ingram, D., Mingham, C., Yang, G., Pearson, R.: Calculation of shallow water flows using a Cartesian cut cell approach, *Adv. Water Resour.*, Vol.23, pp.545-562, 2000.
- 2) Mingham, C., Causon, D., Ingram, D.: A high resolution finite volume method for shallow water flows, *J. Hydraul. Eng.*, Vol.124(6), pp.605-614, 1998.
- 3) vanleer, B.: On the relation between the upwind-differencing schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe, *SIAM. J. Scient. Statist. Comput.*, Vol.5(1), pp.1-20, 1984.
- 4) Hirt, C.W. and Sicilian, J.M.: A porosity technique for the definition of obstacles in rectangular cell meshes, *Proc. Fourth International Conf. Ship Hydro.*, National Academy of Science, Washington, DC., 1985.
- 5) Liu, P., Cho, Y., Briggs, M., Kanoglu, U., Synolakis, C.: Runup of solitary waves on a circular island, *J. Fluid Mech.*, Vol.302, pp.259-285, 1995.
- 6) 後藤智明・佐藤一央：三陸沿岸を対象とした津波数値計算システムの開発，港研報告，第32巻，第2号，pp.3-44，1993.